



**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Московский государственный технологический университет  
«Станкин»**

**Учебно-методическое объединение по образованию  
в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ)**

**Сазанов И. И.**

## **Гидравлика**

Конспект лекций

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: бакалавров и магистров - «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств»; дипломированных специалистов - «Автоматизированные технологии и производства».

Москва 2004

**Сазанов И. И.**

Гидравлика. Конспект лекций. Учебное пособие. — М.: ИЦ МГТУ  
Станкин, 2004 — 292 с.

В учебном пособии рассмотрены основные законы и уравнения гидравлики, охватывающие разделы свойств жидкостей, гидростатики, кинематики и динамики жидкостей, гидродинамического подобия и особых случаев течения.

Изложены основные вопросы, направленные на приобретение студентами теоретических знаний и практических навыков по применению основ процессов, протекающих в жидких средах в основном с ориентацией на гидравлические приводы технологического оборудования.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям бакалаврской подготовки 150900 - "Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств", 150400 - "Технологические машины и оборудование" и направлению инженерной подготовки 220300 "Автоматизированные технологии и производства" а также может быть полезным при подготовке специалистов по специальностям 151001, 151002, 151003, 150201, 150206, 150802, 220301, 220402 и другим, связанным с теорией жидкости, и гидравлическими приводами различного технологического оборудования.

***Рецензенты:***

Навроцкий К.Л., доктор технических наук, профессор Московского автомобильно-дорожного института (технического университета).  
Артюшин Ю.В., руководитель отдела дидактики ООО «ФЕСТО РФ», кандидат технических наук, доцент.

©Кафедра систем приводов МГТУ «Станкин», 2004

---

***Сазанов Игорь Иванович***

**Гидравлика. Конспект лекций.**

Учебное пособие.

Лицензия на издательскую деятельность ЛР 01741 от 11.05.2000

Подписано в печать .2004 Формат

Уч. изд. л. . Тираж экз. Заказ №

Отпечатано в Издательском Центре МГТУ «СТАНКИН»

127055, Москва, Вадковский пер., д. 3 а

# Содержание

<b>ЛЕКЦИЯ 1. ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>7</b>
Зачем гидравлика в машиностроении?	9
Жидкость как объект изучения гидравлики	12
Гипотеза сплошности	13
<b>ЛЕКЦИЯ 2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ</b>	<b>14</b>
Плотность	14
Удельный вес	15
Относительный удельный вес	15
Сжимаемость жидкости	16
Температурное расширение жидкости	18
Растворение газов	19
Кипение	20
Сопротивление растяжению жидкостей	20
Вязкость	21
Закон жидкостного трения – закон Ньютона	22
Анализ свойства вязкости	23
Неньютоновские жидкости	24
Определение вязкости жидкости	25
<b>ЛЕКЦИЯ 3. ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ</b>	<b>27</b>
Изменение характеристик рабочих жидкостей	29
Загрязнение во время поставки, хранения и заправки	29
Загрязнение в процессе изготовления, сборки и испытания	30
Загрязнение в процессе эксплуатации	31
Распад жидкости под действием различных факторов	31
Последствия загрязнения рабочей жидкости	32
Применяемые жидкости	34
<b>ЛЕКЦИЯ 4. ГИДРОСТАТИКА</b>	<b>35</b>
Силы, действующие в жидкости	35
Массовые силы	35
Поверхностные силы	36
Силы поверхностного натяжения	36
Силы давления	38
Свойства гидростатического давления	39
Основное уравнение гидростатики	42

Следствия основного уравнения гидростатики _____	43
Приборы для измерения давления _____	43
<b>ЛЕКЦИЯ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ</b> _____	<b>47</b>
Частные случаи интегрирования уравнений Эйлера _____	50
Покой жидкости под действием силы тяжести _____	50
Физический смысл основного закона гидростатики _____	51
Прямолинейное равноускоренное движение сосуда с жидкостью _____	53
Покой при равномерном вращении сосуда с жидкостью _____	54
<b>ЛЕКЦИЯ 6. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ОКРУЖАЮЩИЕ ЕЁ СТЕНКИ</b> _____	<b>57</b>
Сила давления жидкости на плоскую стенку _____	57
Центр давления _____	58
Сила давления жидкости на криволинейную стенку _____	61
Круглая труба под действием гидростатического давления _____	63
Гидростатический парадокс _____	64
Основы теории плавания тел _____	64
<b>ЛЕКЦИЯ 7. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ</b> _____	<b>66</b>
Виды движения (течения) жидкости _____	66
Типы потоков жидкости _____	68
Гидравлические характеристики потока жидкости _____	69
Струйная модель потока _____	71
<b>ЛЕКЦИЯ 8. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ</b> _____	<b>73</b>
Уравнение неразрывности для элементарной струйки жидкости _____	73
Уравнение неразрывности в гидравлической форме для потока жидкости при установившемся движении _____	74
Дифференциальные уравнения неразрывности движения жидкости _____	74
<b>ЛЕКЦИЯ 9. ДИНАМИКА ЖИДКОСТЕЙ</b> _____	<b>81</b>
Дифференциальные уравнения Эйлера для движения идеальной жидкости _____	81
Преобразование уравнений Эйлера _____	83
Исследование уравнений Эйлера _____	84
Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье - Стокса) _____	86
<b>ЛЕКЦИЯ 10. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА</b> _____	<b>89</b>
Уравнение Бернулли _____	90
Уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости _____	90
Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли _____	92

Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли _____	94
Уравнение Бернулли для потока идеальной жидкости _____	95
Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости _____	96
<b>ЛЕКЦИЯ 11. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ _____</b>	<b>99</b>
Два режима течения жидкости _____	99
Физический смысл числа Рейнольдса _____	101
Основные особенности турбулентного режима движения _____	102
Возникновение турбулентного течения жидкости _____	103
Возникновение ламинарного режима _____	104
<b>ЛЕКЦИЯ 12. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ПОТОКАХ ЖИДКОСТИ _____</b>	<b>106</b>
Сопротивление потоку жидкости _____	106
Гидравлические потери по длине _____	108
Ламинарное течение жидкости _____	110
<b>ЛЕКЦИЯ 13. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ _____</b>	<b>116</b>
Вязкое трение при турбулентном движении _____	116
Турбулентное течение в трубах _____	118
Турбулентное течение в гладких трубах _____	119
Турбулентное течение в шероховатых трубах _____	120
Выводы из графиков Никурадзе _____	123
<b>ЛЕКЦИЯ 14. МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ _____</b>	<b>124</b>
Местные гидравлические сопротивления _____	124
Виды местных сопротивлений _____	126
Внезапное расширение. Теорема Борда - Карно _____	126
Внезапное сужение потока _____	129
Постепенное расширение потока _____	130
Постепенное сужение потока _____	132
Внезапный поворот потока _____	133
Плавный поворот потока _____	133
<b>ЛЕКЦИЯ 15. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ _____</b>	<b>134</b>
Основы теории подобия, геометрическое и динамическое подобие _____	134
Критерии подобия для потоков несжимаемой жидкости _____	135
Критерий подобия Ньютона _____	135
Критерий подобия Эйлера _____	136
Критерий подобия Рейнольдса _____	137
Критерий подобия Фруда _____	139

Заключение о подобии напорных потоков _____	140
<b>ЛЕКЦИЯ 16. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ _____</b>	<b>141</b>
Сжатие струи _____	141
Истечение через малое отверстие в тонкой стенке _____	142
Истечение через насадки _____	145
<b>ЛЕКЦИЯ 17. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ ____</b>	<b>147</b>
Простые трубопроводы постоянного сечения _____	147
Последовательное соединение трубопроводов _____	149
Параллельное соединение трубопроводов _____	151
Разветвлённые трубопроводы _____	153
Трубопроводы с насосной подачей жидкости _____	154
<b>ЛЕКЦИЯ 18. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБОПРОВОДАХ ____</b>	<b>157</b>
Скорость распространения гидравлической ударной волны в трубопроводе _____	161
Ударное давление _____	165
Протекание гидравлического удара во времени _____	166
Разновидности гидроудара _____	167
<b>ЛЕКЦИЯ 19. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ____</b>	<b>169</b>
Ламинарное течение в зазорах _____	169
Ламинарное течение в плоских зазорах _____	169
Ламинарное течение в плоских зазорах с подвижной стенкой _____	171
Ламинарное течение в кольцевых зазорах _____	174
Ламинарное течение в трубах прямоугольного сечения _____	175
Смазочный слой в подшипнике _____	176
<b>ЛЕКЦИЯ 20. ОСОБЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ _____</b>	<b>180</b>
Кавитационные течения _____	180
Течение с облитерацией _____	183
Течение с теплообменом _____	184
Течение при больших перепадах давления _____	185
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ _____</b>	<b>190</b>

## Лекция 1. Введение

*Механика*, как раздел физики, изучает законы равновесия и движения материальных тел различных видов. Она разделяется на:

- ✓ *механику твёрдого тела*, которая изучает покой и движение тел как совокупности сильно связанных материальных точек;
- ✓ *механику сыпучих сред*, изучающую движение песчаных грунтов, зерна и других аналогичных тел;
- ✓ *механику жидких сред*, в которой изучают равновесие и движение жидкости.



Часть механики жидких сред, которая рассматривает движение жидкости, а также силовое взаимодействие между жидкостью и обтекаемыми ею телами или ограничивающими ее поверхностями, называется *гидромеханикой*.

Раздел механики, в котором изучают движение газов и жидкостей и обтекание ими тел, называют *аэромеханикой*.

Прикладную часть гидромеханики, для которой характерен определенный круг технических вопросов, задач и методов их решения, называют *технической механикой жидкости*, или *гидравликой*.

Обычно гидравлику определяют как науку о законах равновесия и движения жидкостей и о способах приложения этих законов к решению практических задач. В гидравлике рассматриваются главным образом потоки жидкости, ограниченные и направленные твердыми стенками, т. е. течения в открытых и закрытых руслах (каналах). Можно сказать, таким образом, что в гидравлике изучают внутренние течения жидкостей и решают так называемую «*внутреннюю*» задачу в отличие от «*внешней*» задачи, связанной с внешним обтеканием тел сплошной средой, которое имеет место при движении твердого тела в жидкости или газе (воздухе). «Внешнюю» задачу рассматривают в *собственно гидромеханике или аэрогидромеханике*. Этот раздел в основном связан с потребностями авиации и судостроения.

В гидравлике при решении различных практических задач широко используются те или иные допущения и предположения, упрощающие рассматриваемый вопрос. Достаточно часто гидравлические решения основываются на результатах экспериментов, и потому в гидравлике применяется относительно много различных эмпирических и полуэмпирических формул. При этом, как правило, оцениваются только главные характеристики изучаемого явления и часто используются те или иные интегральные и осредненные величины, которые дают достаточную для технических задач характеристику рассматриваемых явлений.

По своему характеру техническая механика (гидравлика) близка к известным дисциплинам — сопротивлению материалов и строительной механике, в которых под тем же углом зрения изучаются вопросы механики твердого тела. Следует учитывать, что гидравлика, являясь общетехнической дисциплиной, может рассматриваться как «профессиональная физика жидкого тела», в которой, в частности, даются основы соответствующих гидравлических расчетов. Эти расчёты используются при проектировании инженерных гидротехнических сооружений, конструкций, а также гидросистем технологического оборудования, применяемых во многих областях техники.

Разумеется, что гидравлика разделяется на статику жидкости (гидростатику), кинематику потоков жидкости и динамику жидкости (гидродинамику).

Метод, применяемый в современной гидравлике при исследовании движения, заключается в следующем. Исследуемые явления сначала упрощают, и к ним применяют законы теоретической механики. Затем полученные результаты сравнивают с данными опытов, выясняют степень расхождения, уточняют и исправляют теоретические выводы и формулы для приспособления их к практическому использованию. Целый ряд явлений, крайне трудно поддающихся теоретическому анализу, ввиду своей сложности, исследуют экспериментальным путем, а результаты такого исследования представляют в виде эмпирических формул.

Особенно велико значение гидравлики в машиностроении, где приходится иметь дело с закрытыми потоками в трубах и давлениями, многократно превышающими атмосферное. Гидросистемы, состоящие из насосов, трубопроводов, различных гидроагрегатов, широко используются в машиностроении в качестве устройств передачи и преобразования энергии, жидкостного охлаждения, топливоподачи, смазки и др.

Можно также отметить, что имеет место и другой подход к классификации разделов механики жидких сред. В этом подходе говорят о двух разных методах исследования:

- ✓ метод «технической механики жидкости» («технической гидромеханики», «гидравлики»),
- ✓ метод «математической механики жидкости» («математической гидромеханики»).

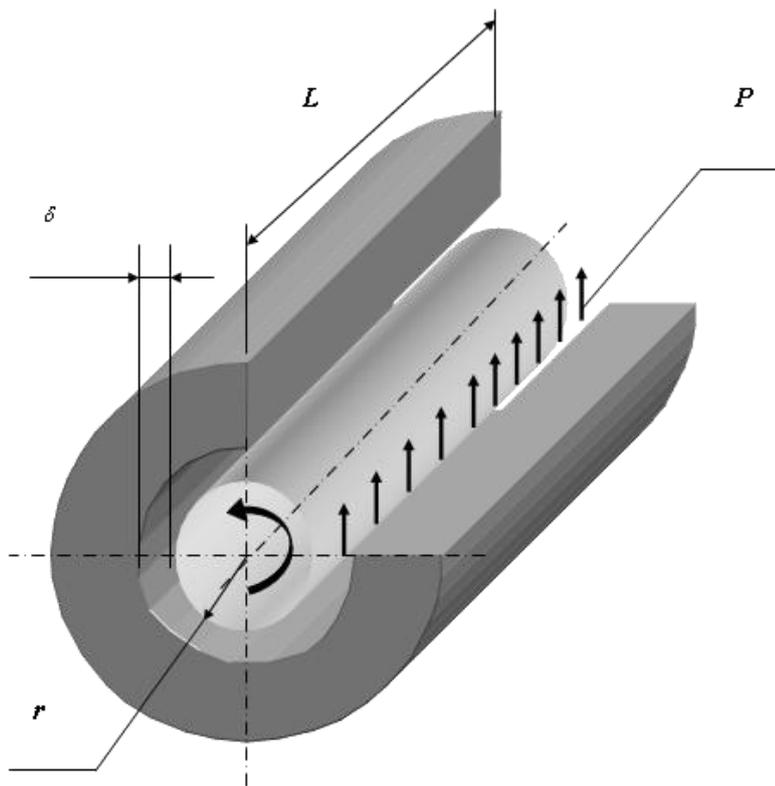
В математической механике жидкости широко используется относительно сложный математический аппарат. Решения, получаемые в этом случае, оказываются более строгими в математическом отношении.

Как показал опыт, методы математической механики жидкости очень часто оказываются столь сложными, что громадное большинство практических задач, следуя этим методам, решить невозможно. Этим и объясняется возникновение и развитие технической, прикладной науки — технической механики жидкости, т. е. гидравлики, которая стремится дать приближенные ответы на все те вопросы, связанные с движущейся или покоящейся жидкостью, которые ставит перед нами практика.

Можно сказать, что в технической гидромеханике (в гидравлике) приближенно решаются сложные задачи при помощи простых методов. В математической же гидромеханике относительно точно решаются только некоторые простейшие задачи при помощи сложных методов.

## **Зачем гидравлика в машиностроении?**

Важнейшей частью почти любого технологического оборудования, станка, пресса, робота и т.д. является привод. Простейшим образом привод можно понимать как совокупность устройств, предназначенных для преобразования и передачи энергии, необходимой для осуществления технологического движения с заданными кинематическими и силовыми характеристиками. В технике широко применяются механический, электрический, пневматический (газовый, чаще всего воздушный) и гидравлический приводы и их комбинации. Важнейшей характеристикой любого привода является крутящий момент (или сила), который он может обеспечивать при одних и тех же размерах или весе. Попытаемся сравнить по этому показателю электрический, пневматический и гидравлический приводы.



Для подобного анализа приводов рассмотрим основной, наиболее часто встречающийся элемент привода – двигатель вращения. Любой такой двигатель принципиально состоит из неподвижного статора и вращающегося внутри него ротора. При этом в любом двигателе можно считать, что ротор отталкивается от статора, в результате чего создаётся вращение.

Таким образом, можно считать, что между статором и ротором есть какая-то **рабочая среда (рабочее тело)**, которая, упиравшись в статор, толкает ротор. В электродвигателе это электромагнитное поле, в пневматическом двигателе это воздух, в гидродвигателе это жидкость. Чем больше сила отталкивания, тем больший крутящий момент развивает двигатель. Величина силы отталкивания зависит от того, как сильно сжата рабочая среда, т.е. от того, каковы внутренние **напряжения рабочей среды**.

Для любого двигателя (с некоторыми, непринципиальными допущениями) можно считать, что крутящий момент описывается функцией вида

$$M_{кр} = F(L, r, \delta, Z, P),$$

где  $L$  – длина отталкивания ротора от статора,

$r$  – радиус ротора,

$\delta$  – радиальный зазор между ротором и статором,

$P$  – напряжённость рабочей среды,

$Z$  – количество пар элементов, взаимодействующих в процессе отталкивания ротора от статора (пары полюсов, пластины гидро- или пневмодвигателя и т.п.).

Опираясь на эту функцию, легко определить предельно возможные максимальные напряжения для любого двигателя как отношение развиваемого им крутящего момента к его геометрическим размерам. Это формула будет иметь вид:

$$P = \frac{M_{кр}}{Lr\delta Z}.$$

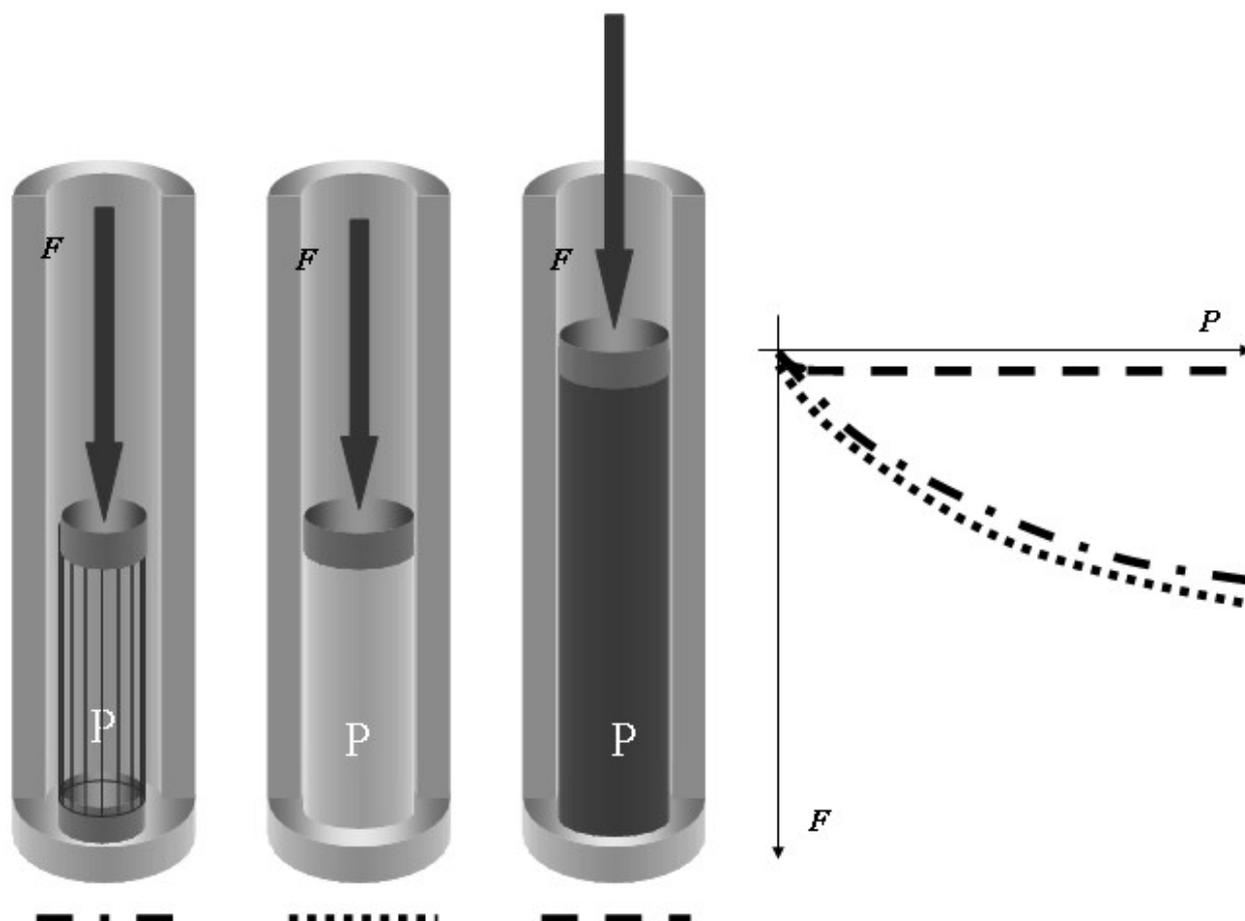
Величина  $P$  будет выражаться в единицах напряженности рабочей среды  $\text{Н/м}^2$ .

Если таким способом проанализировать двигатели всех трёх типов, разделив их максимальные крутящие моменты на соответствующие геометрические характеристики, то можно установить следующее:

- ✓  $P$  электромагнитного поля - около  $1 \text{ МПа}$
- ✓  $P$  газовой среды - около  $1 \text{ МПа}$
- ✓  $P$  жидкостной среды -  $6,3\text{-}40 \text{ МПа}$  и выше.

Следовательно, гидравлический привод во многие разы и даже десятки раз более энергоёмкий, чем электрический и пневматический.

При этом гидравлический привод имеет еще одну, очень важную особенность, которую можно проиллюстрировать на следующем опыте. Возьмём три одинаковых цилиндра. В первый цилиндр поместим два магнита противоположными полюсами навстречу друг к другу так, чтобы верхний магнит



мог играть роль подвижного поршня. Во втором, заполненном воздухом, и третьем, заполненном жидкостью, установим плотно пригнанные поршни. Ко всем трём поршням приложим силы, сжимающие рабочие среды: электромагнитное поле, воздух и жидкость. При увеличении сил поршни начнут опускаться, а напряжение рабочих сред  $P$  будет расти. В цилиндре с жидкостью перемещение будет практически незаметным по сравнению с остальными цилиндрами. Т.е. жидкость по сравнению с газом и электромагнитным

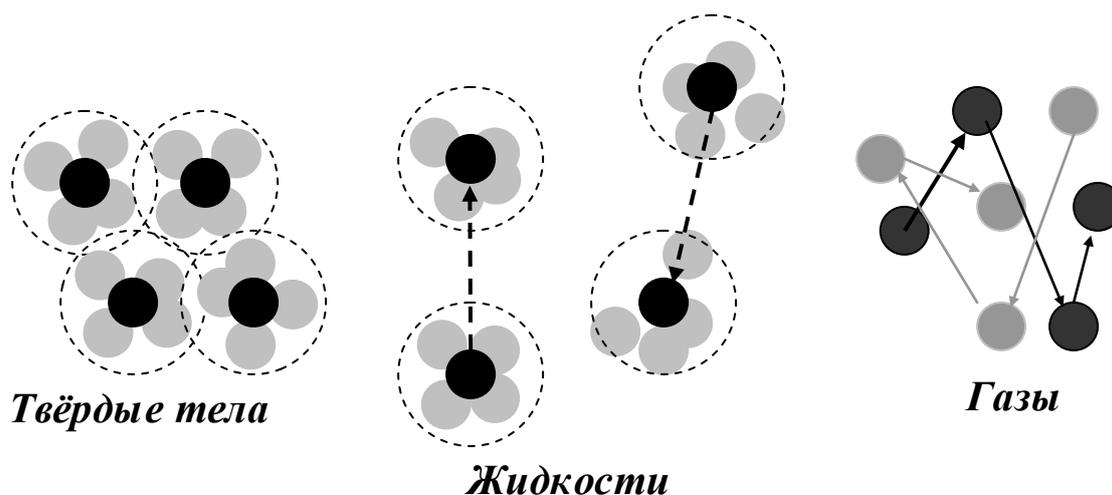
полем, практически несжимаема в большом диапазоне сил. Последнее проиллюстрировано на графике. Это качество обеспечивает высокую жёсткость гидропривода в большом диапазоне нагрузок.

Описанные особенности гидравлического привода определяют область его использования в технике. В большинстве случаев его применение обусловлено необходимостью в высоких энергетических показателях при малом весе или габаритах.

## Жидкость как объект изучения гидравлики

Передачу энергии в гидравлических системах обеспечивают рабочие жидкости, поэтому чтобы эффективно их применять, надо знать какими свойствами они обладают.

Жидкости, как и все вещества, имеют молекулярное строение. Они занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами. Это определяется величинами межмолекулярных сил и характером движений составляющих их молекул. В газах расстояния между молекулами больше, а силы межмолекулярного взаимодействия меньше, чем в жидкостях и твердых телах, поэтому газы отличаются от жидкостей и твердых тел большей



сжимаемостью. По сравнению с газами жидкости и твердые тела малосжимаемы.

Молекулы жидкости находятся в непрерывном хаотическом тепловом движении, отличающемся от хаотического теплового движения газов и твердых тел. В жидкостях это движение осуществляется в виде колебаний ( $10^{13}$  колебаний в секунду) относительно мгновенных центров и скачкообразных переходов от одного центра к другому. Тепловое движение молекул твердых тел состоит в колебаниях относительно стабильных центров. Тепловое движение молекул газа выглядит, как непрерывные скачкообразные перемены мест.

При этом надо заметить, что изменение температуры и давления приводят к изменениям свойств жидкостей. Установлено, что при повышении температуры и уменьшении давления свойства жидкостей приближаются к

свойствам газов, а при понижении температуры и увеличении давления – к свойствам твердых тел.

Термин «жидкость» применяется для обозначения и собственно жидкости, которую рассматривают как несжимаемую или мало сжимаемую среду, и газа, который можно рассматривать как «сжимаемую жидкость».

## Гипотеза сплошности

Рассматривать и математически описывать жидкость как совокупность огромного количества отдельных частиц, находящихся в постоянном непрогнозируемом движении, на современном уровне науки не представляется возможным. По этой причине жидкость рассматривается как некая сплошная деформируемая среда, имеющая возможность непрерывно заполнять пространство, в котором она заключена. Другими словами, под жидкостями понимают все тела, для которых характерно свойство *текучести*, основанное на явлении диффузии. Текучестью можно назвать способность тела как угодно сильно менять свой объём под действием сколь угодно малых сил. Таким образом, в гидравлике жидкость понимают как абстрактную среду – *континуум*, который является основой гипотезы сплошности. Континуум считается непрерывной средой без пустот и промежутков, свойства которой одинаковы во всех направлениях. Это означает, что все характеристики жидкости являются непрерывными функциями и все частные производные по всем переменным также непрерывны.

По-другому такие тела (среды) называют *капельными* жидкостями. Капельные жидкости - это такие, которые в малых количествах стремятся принять шарообразную форму, а в больших образуют свободную поверхность.

Очень часто в математических описаниях гидравлических закономерностей используются понятия «*частица жидкости*» или «*элементарный объём жидкости*». К ним можно относиться как к бесконечно малому объёму, в котором находится достаточно много молекул жидкости. Например, если рассмотреть кубик воды со сторонами размером *0,001 см*, то в объёме будет находиться  $3,3 \cdot 10^{13}$  молекул. Частица жидкости полагается достаточно малой по сравнению с размерами области, занятой движущейся или покоящейся жидкостью.

Сплошная среда представляет собой модель, которая успешно используется при исследовании закономерностей покоя и движения жидкости. Правомочность применения такой модели жидкости подтверждена всей практикой гидравлики.

## Лекция 2. Основные физические свойства жидкостей

### Плотность

Плотность жидкости  $\rho$ , так же как любых других тел, представляет собой массу единицы объёма, и для бесконечно малого объёма жидкости  $dW$  массой  $dM$  может быть определена по формуле:

$$\rho = \frac{dM}{dW}.$$

Для однородных жидкостей можно считать, что

$$\rho = \frac{M}{W},$$

где  $M$  – масса жидкости,

$W$  – объём жидкости.

Единицы измерения:

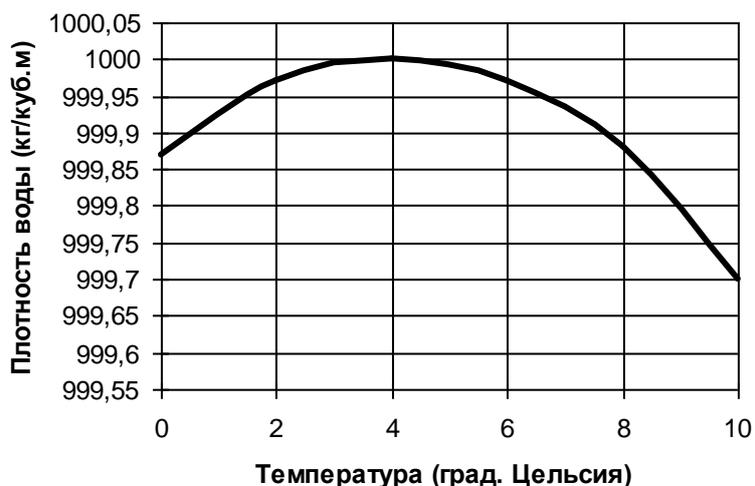
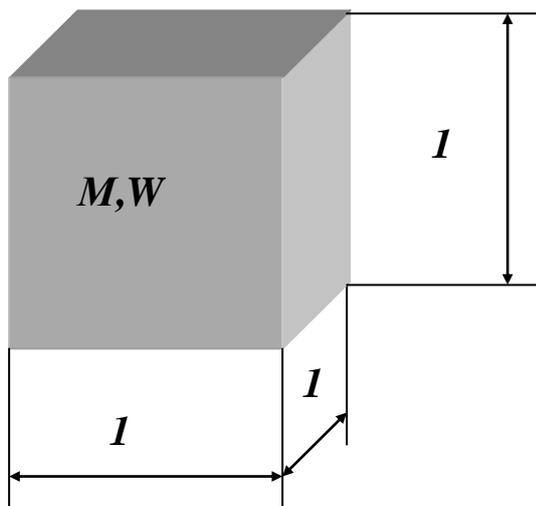
$[кг/м^3]$ ,  $[кг/дм^3]$ ,  $[кг/л]$ ,  $[г/см^3]$ .

Плотность жидкости зависит от температуры и давления. Все жидкости, кроме воды, характеризуются уменьшением плотности с ростом температуры. Плотность воды имеет максимум при  $t = 4^\circ C$  и уменьшается при любых других температурах. В этом проявляется одно из аномальных свойств воды. Температура, при которой плотность воды максимальная, с

увеличением давления уменьшается. Так, при давлении **14 МПа** вода имеет максимальную плотность при **0,6 °C**.

Плотность пресной воды равна **1000 кг/м<sup>3</sup>**, солёной морской воды – **1020 ÷ 1030**, нефти и нефтепродуктов – **650 ÷ 900 кг/м<sup>3</sup>**, ртути – **13596 кг/м<sup>3</sup>**.

При изменении давления плотность жидкостей изменяется незначительно. В большинстве случаев плотность жидкости в расчётах можно при-



нимать постоянной. Однако встречаются случаи, когда изменением плотности пренебрегать нельзя, т.к. это может привести к значительным ошибкам.

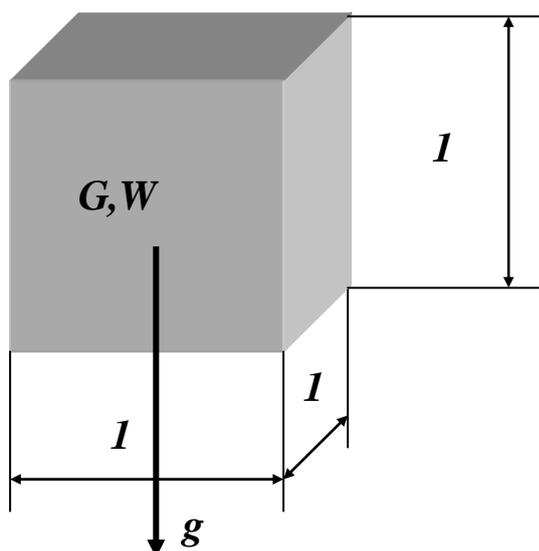
## Удельный вес

Удельным весом жидкости  $\gamma$  - называется вес единицы её объёма. Эта величина выражается формулой для бесконечно малого объёма жидкости  $dW$  с весом  $dG$ :

$$\gamma = \frac{dG}{dW} = \frac{gdM}{dW}.$$

Для однородных жидкостей можно считать:

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{Mg}{W},$$



где  $G$  – вес жидкости.

Удельный вес жидкости и плотность связаны соотношением:

$$\gamma = \rho g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Единицы измерения:  $[Н/м^3]$ ,  $[Н/дм^3]$ ,  $[Н/л]$ ,  $[Н/см^3]$ ,  $1Н=1кг \cdot м/с^2$ .

Значение ускорения свободного падения  $g$  на земле изменяется от  $9,831 м/с^2$  на полюсах до  $9,781 м/с^2$  на экваторе.

## Относительный удельный вес

Иногда удобно использовать такую характеристику жидкости, которая называется «относительный удельный вес». Это отношение удельного веса жидкости к удельному весу пресной воды

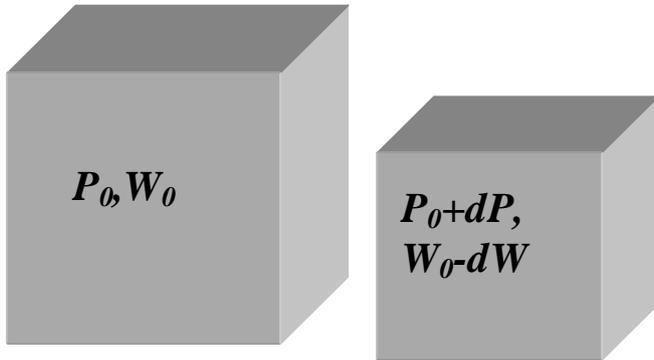
$$\delta_{жс} = \frac{\gamma_{жс}}{\gamma_{воды}}.$$

Единицы измерения: Относительный удельный вес - величина безразмерная.

## Сжимаемость жидкости

Сжимаемость жидкости это свойство жидкостей изменять свой объём при изменении давления.

Сжимаемость характеризуется *коэффициентом объёмного сжатия* (сжимаемости)  $\beta_P$ , представляющим собой относительное изменение объёма жидкости  $W$  при изменении давления  $P$  на единицу.



$$\beta_P = -\frac{1}{W_0} \frac{dW}{dp}.$$

Знак минус в формуле указывает, что при увеличении давления объём жидкости уменьшается.

Единицы измерения:  $\text{Па}^{-1}$   
(Паскаль.  $1\text{Па}=1\text{Н/м}^2$ ).

Перепишем определение  $\beta_P$  в виде

$$\beta_P = -\frac{dW}{W_0} \frac{1}{dp}.$$

Обе части умножим на знаменатель и перенесём в левую часть

$$\beta_P W_0 dp + dW = 0.$$

Учтём, что

$$dW = W - W_0,$$

и подставим в предыдущее равенство

$$\beta_P W_0 dp + W - W_0 = 0.$$

Выразив отсюда  $W$ , можно получить формулу для вычисления нового значения объёма при известном увеличении давления

$$W = W_0 - \beta_P W_0 dp = W_0 (1 - \beta_P dP).$$

Если учесть, что все изменения объёма происходят при неизменной массе за счёт изменения плотности ( $W_0 = \frac{M}{\rho_0}$  и  $W = \frac{M}{\rho}$ ), можно получить формулу изменения плотности при изменении давления

$$\frac{M}{\rho} = \frac{M}{\rho_0} (1 - \beta_P dP) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{(1 - \beta_P dP)}{\rho_0}.$$

Откуда выразив  $\rho$ , получим

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \beta_P dP}.$$

Изменение объёма  $dW$ , происходящее за счёт изменения плотности  $d\rho$  при постоянной массе, можно записать в виде

$$dW = \frac{M}{d\rho}.$$

Подставив это в определение  $\beta_P$ , определим коэффициент сжимаемости жидкости через изменение плотности

$$\beta_P = \frac{\frac{M}{d\rho}}{\frac{M}{\rho}} \frac{1}{dP} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{dP}.$$

Отсутствие знака минус в этом выражении означает, что увеличение давления приводит к увеличению плотности.

Величина, обратная коэффициенту сжимаемости, или, по-другому, коэффициенту объёмного сжатия  $\beta_P$ , обозначается

$$E_{жс} = \frac{1}{\beta_P},$$

и называется объёмным модулем упругости жидкости.

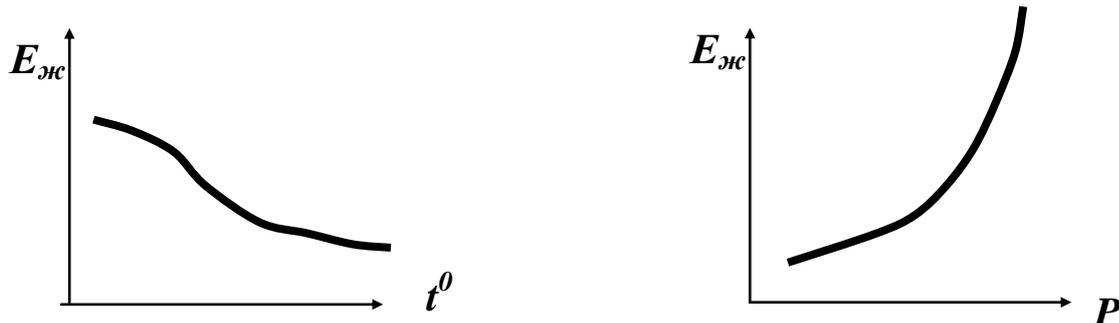
Тогда предыдущая формула примет вид

$$E_{жс} = \rho \frac{dP}{d\rho}.$$

Это выражение называется законом Гука для жидкости.

Единицы измерения: [Па], [МПа], [кГс/см<sup>2</sup>].

Модуль упругости  $E_{жс}$  зависит от температуры и давления. Поэтому различают два модуля упругости: адиабатический и изотермический. Первый имеет место при быстротекущих процессах без теплообмена. Процессы, происходящие в большинстве гидросистем, происходят с теплообменом, поэтому чаще используется изотермический модуль упругости. Примерная форма зависимостей  $E_{жс}$  от  $P$  и  $t^0$  представлена на графиках. Всё это говорит о том, что жидкости не вполне точно следуют закону Гука.



Приведём несколько примеров значений модулей упругости.

Минеральные масла, используемые в технологических машинах с гидравлическим приводом, при  $t^0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  имеют объёмные модули упругости  $1,35 \cdot 10^3 \div 1,75 \cdot 10^3 \text{ МПа}$  (меньшее значение относится к более легкому маслу), бензин и керосин – приблизительно  $1,3 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , глицерин –  $4,4 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , ртуть – в среднем  $3,2 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ .

В практике эксплуатации гидравлических систем имеются случаи, когда вследствие действия того или иного возмущения в жидкости может значительно изменяться давление. В таких случаях пренебрежение сжимаемостью приводит к существенным погрешностям.

Известно, что скорость распространения звука  $c$  в однородной жидкости можно определить по формуле

$$c = \sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}.$$

Если вспомнить, что  $E_{жс} = \rho \frac{dP}{d\rho}$ , и подставить это значение в формулу скорости распространения звука, получим

$$c = \sqrt{\frac{\rho \frac{dP}{d\rho}}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}.$$

В этом случае изменение плотности жидкости, вызванное изменением давления, будет

$$d\rho = \frac{dP}{c^2}.$$

Если считать, что жидкость несжимаемая, т.е.  $d\rho = 0$ , то окажется, что скорость распространения звука в жидкости по приведённой формуле окажется бесконечной ( $c = \infty$ ). При использовании такого значения  $c$  в случае достаточно больших объёмов жидкости (озеро или нефтепровод) или быстрого изменения давления, например, при резком закрытии или открытия запорного устройства в трубопроводе, результаты расчётов окажутся существенно неточными. По этой причине в описанных условиях принимать жидкость несжимаемой недопустимо.

## Температурное расширение жидкости

Температурное расширение жидкости состоит в том, что она может изменять свой объём при изменении температуры. Это свойство характеризуется *температурным коэффициентом объёмного расширения*, представ-

ляющим относительное изменение объема жидкости при изменении температуры на единицу (на 1°C) и при постоянном давлении:

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}.$$

По аналогии со свойством сжимаемости жидкости можно записать

$$W = W_0(1 + \beta_t dt).$$

или через плотность

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_t dt}.$$

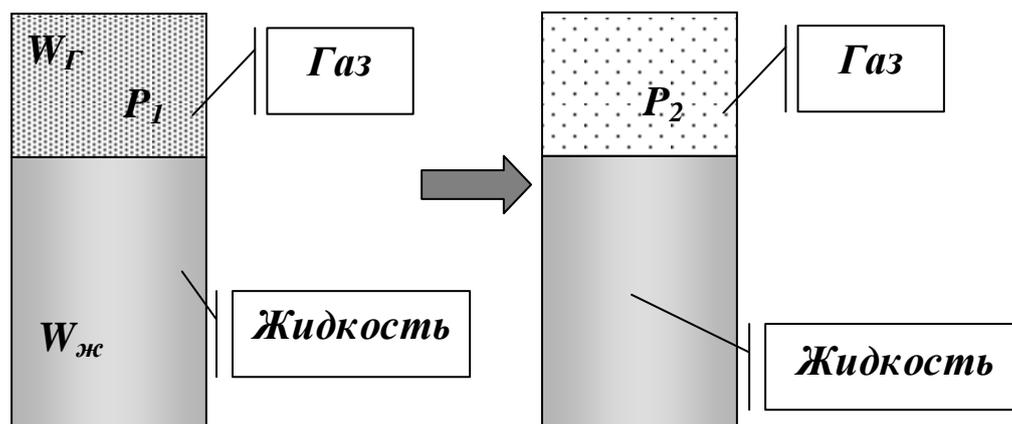
Изменение объёма при изменении температуры происходит за счёт изменения плотности.

Для большинства жидкостей коэффициент  $\beta_t$  с увеличением давления уменьшается. Коэффициент  $\beta_t$  с уменьшением плотности нефтепродуктов от 920 до 700 кг/м<sup>3</sup> увеличивается от 0,0006 до 0,0008; для рабочих жидкостей гидросистем  $\beta_t$  обычно принимают не зависящим от температуры. Для этих жидкостей увеличение давления от атмосферного до 60 МПа приводит к росту  $\beta_t$  примерно на 10 – 20 %. При этом, чем выше температура рабочей жидкости, тем больше увеличение  $\beta_t$ . Для воды с увеличением давления при температуре до 50 °С  $\beta_t$  растёт, а при температуре выше 50 °С уменьшается.

## Растворение газов

Растворение газов - способность жидкости поглощать (растворять) газы, находящиеся в соприкосновении с ней. Все жидкости в той или иной степени поглощают и растворяют газы. Это свойство характеризуется *коэффициентом растворимости  $k_p$* .

Если в закрытом сосуде жидкость находится в контакте с газом при давлении  $P_1$ , то газ начнёт растворяться в жидкости. Через какое-то время



произойдёт насыщение жидкости газом и давление в сосуде изменится. Коэффициент растворимости связывает изменение давления в сосуде с объёмом растворённого газа и объёмом жидкости следующим соотношением

$$\frac{W_{\Gamma}}{W_{ж}} = K_P \frac{P_2}{P_1};$$

где  $W_{\Gamma}$  – объём растворённого газа при нормальных условиях,

$W_{ж}$  – объём жидкости,

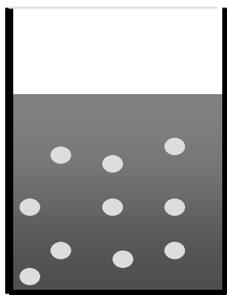
$P_1$  и  $P_2$  – начальное и конечное давление газа.

Коэффициент растворимости зависит от типа жидкости, газа и температуры.

При температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  и атмосферном давлении в воде содержится около  $1,6\%$  растворенного воздуха по объёму ( $k_p = 0,016$ ). С увеличением температуры от  $0$  до  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  коэффициент растворимости воздуха в воде уменьшается. Коэффициент растворимости воздуха в маслах при температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  равен примерно  $0,08 - 0,1$ . Кислород отличается более высокой растворимостью, чем воздух, поэтому содержание кислорода в воздухе, растворённом в жидкости, примерно на  $50\%$  выше, чем в атмосферном. При уменьшении давления газ из жидкости выделяется. Процесс выделения газа протекает интенсивнее, чем растворение.

## Кипение

Кипение – способность жидкости переходить в газообразное состояние. Иначе это свойство жидкостей называют *испаряемостью*.

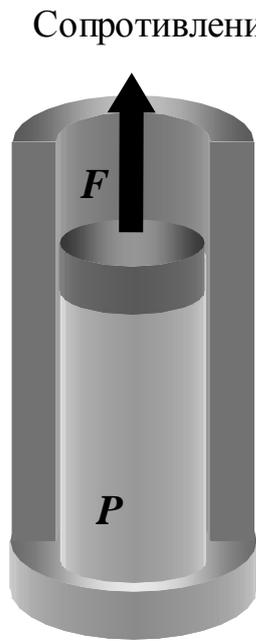


Жидкость можно довести до кипения повышением температуры до значений, больших температуры кипения при данном давлении, или понижением давления до значений, меньших давления насыщенных паров  $p_{нп}$  жидкости при данной температуре. Образование пузырьков при понижении давления до давления насыщенных паров называется холодным кипением.

Жидкость, из которой удален растворенный в ней газ, называется дегазированной. В такой жидкости, кипение не возникает и при температуре, большей температуры кипения при данном давлении.

## Сопротивление растяжению жидкостей

Сопротивление растяжению жидкостей заключается в способности жидкости противостоять растягивающим силам.



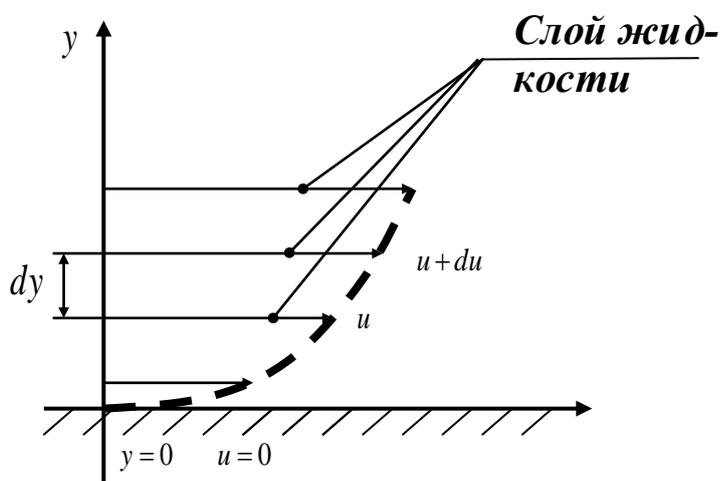
Сопротивление растяжению жидкостей может возникать только в дегазированных жидкостях. В опытах удавалось при центрифугировании дегазированной дистиллированной воды получить на очень короткое время напряжения растяжения в воде, доходившие приблизительно **до 25 МПа**. Технические жидкости не сопротивляются растягивающим усилиям.

Газы могут находиться в жидкости в растворенном и нерастворенном виде. Присутствие в жидкости нерастворенного газа в виде пузырьков существенно уменьшает модуль упругости жидкости, причем это уменьшение не зависит от размеров пузырьков воздуха. Динамическая вязкость жидкости с увеличением содержания в ней воздуха растет. Содержание нерастворенного воздуха в рабочих жидкостях гидросистем машин и механизмов, так же как и в трубопроводах, подающих жидкость, может сильно повлиять на параметры работы трубопроводов и гидросистем.

Сопротивление растяжению жидкостей может возникать только в дегазированных жидкостях. В опытах удавалось при центрифугировании дегазированной дистиллированной воды получить на очень короткое время напряжения растяжения в воде, доходившие приблизительно **до 25 МПа**. Технические жидкости не сопротивляются растягивающим усилиям.

## Вязкость

Вязкость – свойство жидкости оказывать сопротивление относительному сдвигу ее слоев. Вязкость проявляется в том, что при относительном перемещении слоев жидкости на поверхностях их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу, называемые силами внутреннего трения, или силами вязкости. Если рассмотреть то, как распределяются скорости различных слоёв жидкости по сечению потока, то можно легко заметить, что чем дальше от стенок потока, тем скорость движения частиц больше. У стенок потока скорость движения жидкости равна нулю. Иллюстрацией этого является рисунок, так называемой, струйной модели потока. На рисунке применены следующие обозначения:



$u$  - скорость слоя жидкости,

$dy$  - расстояние между соседними слоями жидкости.

Медленно движущийся слой жидкости «тормозит» соседний слой жидкости, движущийся быстрее, и наоборот, слой, движущийся с большей скоростью, увлекает (тянет) за собой слой, движущийся с меньшей скоростью.

Силы внутреннего трения появляются вследствие наличия межмолекулярных связей между движущимися слоями.

## Закон жидкостного трения – закон Ньютона

Если в равномерно движущемся потоке жидкости рассмотреть два соседних слоя с ординатами  $y_1$  и  $y_2$ , расположенных на расстоянии  $dy$  друг от друга, и скорость первого из них обозначить  $u_1$ , а скорость другого  $u_2$ , то разница между ними составит  $du$ . Тогда можно записать

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_2} \frac{u_2 - u_1}{y_2 - y_1} = \frac{du}{dy}.$$

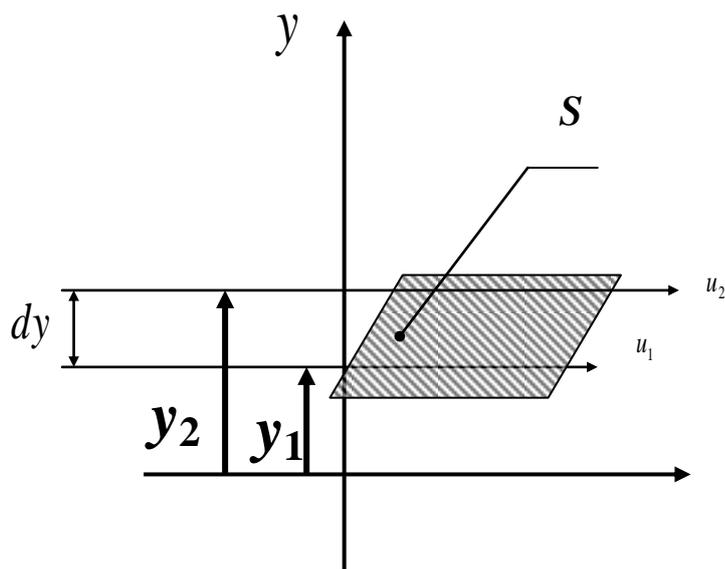
Эта величина называется градиентом скорости по сечению потока или поперечным градиентом скорости. Он показывает, как меняются скорости слоёв жидкости по сечению потока.

Если между соседними слоями жидкости выделить некоторую площадку  $S$ , то согласно гипотезе Ньютона

$$T = \mu S \frac{du}{dy},$$

где  $T$  – силы вязкого трения;

$S$  – площадь трения;



$\mu$  – коэффициент вязкого трения.

Величина  $\mu$  в этом выражении является *динамическим коэффициентом вязкости*, равным

$$\mu = \frac{T}{S} \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

или

$$\mu = \tau \frac{1}{\frac{du}{dy}};$$

где  $\tau$  – касательное напряжение в жидкости (зависит от рода жидкости).

Физический смысл коэффициента вязкого трения - число, равное силе трения, развивающейся на единичной поверхности при единичном градиенте скорости.

Единицы измерения:  $[Н \cdot с / м^2]$ ,  $[кгс \cdot с / м^2]$ ,  $[Пз] \{Пуазель\}$ ,  
 $1 Пз = 0,1 Н \cdot с / м^2$ .

На практике чаще используется **кинематический коэффициент вязкости**, названный так потому, что в его размерности отсутствует обозначение силы. Этот коэффициент представляет собой отношение динамического коэффициента вязкости жидкости к её плотности

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

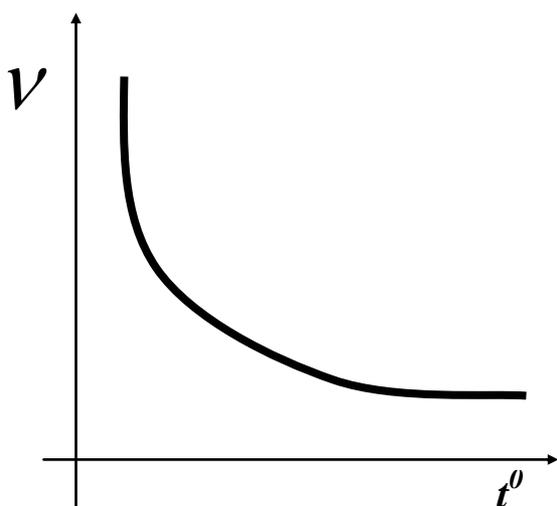
Единицы измерения:  $[м^2/с]$ ,  $[см^2/с]$ ,  $[Ст]$  {стокс},  $[сСт]$  {сантискс},  $1Ст=100сСт$  {1Ст=1 см<sup>2</sup>/с}.

### Анализ свойства вязкости

Для капельных жидкостей вязкость зависит от температуры  $t$  и давления  $P$ , однако последняя зависимость проявляется только при больших изменениях давления, порядка **нескольких десятков МПа**.

Зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры выражается формулой вида:

$$\mu_t = \mu_0 e^{-k_t(T-T_0)};$$



где  $\mu_t$  — коэффициент динамической вязкости при заданной температуре,

$\mu_0$  — коэффициент динамической вязкости при известной температуре (для минеральных масел при **50 °С**),

$T$  — заданная температура,

$T_0$  — температура, при которой измерено значение  $\mu_0$  (**50 °С** для минеральных масел),

$k_t$  — коэффициент, для минеральных масел равный **0,02-0,03**,

$e$  — основание натурального логарифма равно **2,718282**.

Зависимость относительного коэффициента динамической вязкости

$\mu_P = \frac{\mu}{\mu_0}$  от давления описывается формулой

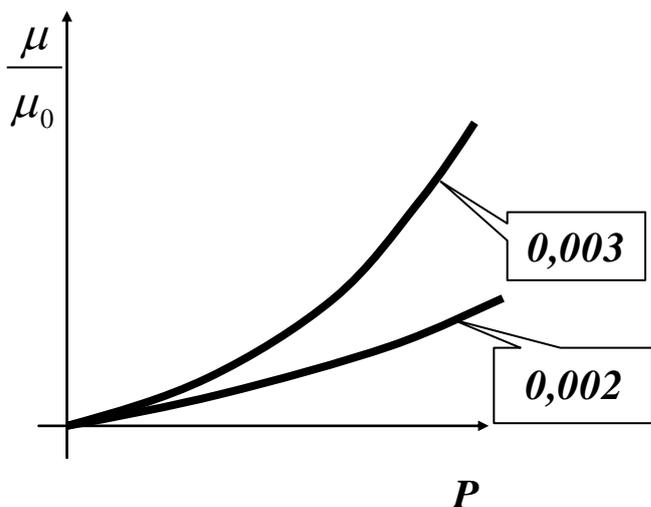
$$\mu_P = \mu_0 e^{k_P(P-P_0)};$$

где  $\mu_P$  — коэффициент динамической вязкости при заданном давлении,

$\mu_0$  — коэффициент динамической вязкости при известном давлении (чаще всего при нормальных условиях),

$P$  — заданное давление,

$P_0$  – давление, при которой измерено значение  $\mu_0$ ,  
 $k_P$  – коэффициент, для минеральных масел равный **0,002-0,003**.



Влияние давления на вязкость жидкости проявляется только при высоких давлениях.

Для примера приведём значения кинематического коэффициента вязкости  $\nu$  для некоторых жидкостей: масла индустриальные (по ГОСТ 20799-75) при температурах  $50^\circ\text{C}$ : **И-5А – 4-5 сСт, И-12А – 10-14 сСт, И-40А – 35-45 сСт**; вода пресная при  $20^\circ\text{C}$  - **0,0101сСт**; ртуть при  $15^\circ\text{C}$

**0,0011- сСт**, сталь жидкая при  $1550^\circ\text{C}$  – **0,0037 сСт**.

Вязкость жидкости - это свойство, проявляющееся только при движении жидкости, и не влияющее на покоящиеся жидкости. Вязкое трение в жидкостях подчиняется закону трения, принципиально отличному от закона трения твёрдых тел, т.к. зависит от площади трения и скорости движения жидкости.

Жидкости, которые подчиняются описанному закону жидкостного трения Ньютона, называются ньютоновскими жидкостями. Однако есть жидкости, трение в которых описывается другими закономерностями.

## Неньютоновские жидкости

Особенностью ньютоновских жидкостей является полное отсутствие трения покоя. Однако существуют жидкости (растворы полимеров, коллоидные суспензии, строительные растворы, пищевые и кормовые смеси и т. п.), для которых связь между касательным напряжением  $\tau$  и поперечным градиентом скорости не подчиняется закону Ньютона. Такие жидкости называются **неньютоновскими** или **аномальными**, и отличаются от ньютоновских наличием касательного напряжения в состоянии покоя  $\tau_0$ .

Например, касательные напряжения подчиняются закону

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{du}{dy}.$$

Такие жидкости называются вязкопластичными, и движение их слоёв начинается лишь после того, как будет преодолено **напряжение сдвига покоя**  $\tau_0$ .

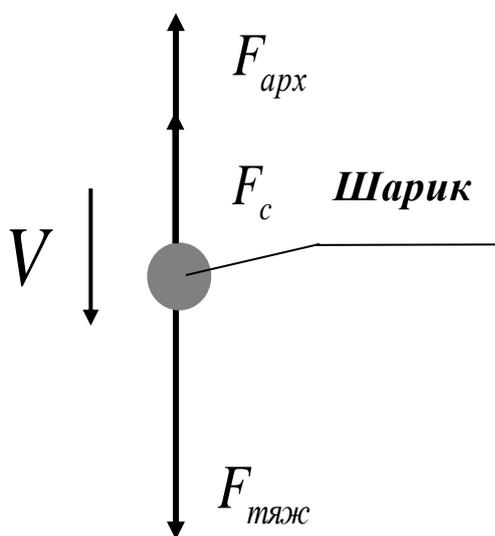
Для других неньютоновских жидкостей динамическая вязкость может зависеть от градиента скорости, времени и т. д. Эта зависимость может иметь, например, следующий вид

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \left( \frac{du}{dy} \right)^k ;$$

где  $k$  – коэффициент, который может зависеть от скорости, времени, температуры, давления и некоторых других факторов.

## Определение вязкости жидкости

Вязкость жидкости определяется экспериментально с помощью приборов, которые называются вискозиметрами. Примером такого прибора может служить вискозиметр Стокса. Его работа основана на следующем. В прозрачную трубку с жидкостью помещается шарик, плотность которого выше плотности жидкости. Шарик медленно опускается в вязкой жидкости с постоянной скоростью  $V$ . На шарик будут действовать: во-первых, сила тяжести



во-вторых, выталкивающая (архимедова) сила

$$F_{тяж} = \rho_{ш} Wg ,$$

во-вторых, выталкивающая (архимедова) сила

$$F_{арх} = \rho_{ж} Wg ,$$

в-третьих, сила Стокса, порождаемая вязким трением на поверхности шарика

$$F_c = 3\pi d V \mu .$$

В приведённых выражениях применены следующие обозначения:

$\rho_{ш}$  - плотность материала шарика,

$\rho_{ж}$  - плотность жидкости,

$W$  - объём шарика,

$V$  - скорость опускания шарика,

$g$  - ускорение свободного падения,

$\mu$  - динамический коэффициент вязкости,

$d$  - диаметр шарика.

Так как скорость тела постоянна, по второму закону Ньютона можно записать

$$F_{тяж} = F_c + F_{арх} .$$

Объём шарика  $W$

$$W = \frac{1}{6} \pi d^3$$

Подставляя полученные выражения в уравнение сил, действующих на шарик, получим:

$$3\pi d\mu \frac{1}{V} = \frac{1}{6} \pi g d^3 (\rho_{ш} - \rho_{ж}).$$

Выразив из последней формулы  $\mu$ , будем иметь выражение для определения динамического коэффициента вязкости:

$$\mu = \frac{1}{18} g d^2 \frac{1}{V} (\rho_{ш} - \rho_{ж}).$$

Если измерить время опускания шарика на определённую, заранее измеренную глубину, то нетрудно определить вязкость любой жидкости.

### Лекция 3. Эксплуатационные свойства жидкостей

Кроме рассмотренных физических свойств жидкостей при их использовании в технологических машинах нужно учитывать и другие характеристики. Они не влияют на математическое описание гидравлических явлений, но оказываются существенными при эксплуатации гидросистем. Требования к таким свойствам определяются, прежде всего, целью, с которой жидкость применяется в технологической машине. В гидроприводе жидкость выполняет несколько различных функций. Во-первых, это функция рабочего тела, обеспечивающего перенос энергии в гидросистеме, поэтому её называют рабочей жидкостью, в гидроприводах тормозов – тормозными жидкостями. Во-вторых, рабочая жидкость является смазочным и охлаждающим веществом. В системах смазки их называют маслами, в системах охлаждения – охлаждающими или смазочно-охлаждающими жидкостями (СОЖ). В этом случае они обеспечивают уменьшение сил трения в парах трения. В-третьих, жидкость является средой, удаляющей из гидросистемы продукты износа. В-четвёртых, смазочно-охлаждающие жидкости обеспечивают защиту деталей от коррозии. Комплекс физико-химических свойств рабочих жидкостей должен наилучшим образом обеспечивать их основную и дополнительные функции. Рабочие жидкости гидросистем должны обладать следующими дополнительными свойствами.

**Антифрикционные** (смазывающие) свойства заключаются в способности жидкости уменьшать силы трения между движущимися деталями. Данное свойство обеспечивается посредством добавления различных модификаторов и присадок.

**Стабильность вязкости** состоит в минимальной зависимости вязкости от температуры в требуемом температурном диапазоне. Вязкость жидкости должна быть оптимальна, т.е. должна обеспечивать хорошие смазывающие свойства при минимальных утечках через неплотности и зазоры в гидросистеме. Это свойство существенно образом зависит от относительных скоростей движения подвижных частей.

**Температура кипения** должна быть высокой, что обеспечивает работоспособность и стойкость жидкости в большом температурном диапазоне.

**Устойчивость к механической и химической деструкции** и к окислению должна быть высокой в условиях применяемого температурного режима, а также в течение максимально длительного срока службы.

**Модуль объёмной упругости** должен максимально высоким.

**Коэффициенты теплопроводности и удельной теплоёмкости** должны быть высокими, что обеспечивает интенсивный отвод тепла из гидросистемы и повышает точность её работы.

**Коэффициент теплового расширения** должен быть небольшим, т.к. это также приводит к увеличению точности работы гидросистемы.

**Экологическая безопасность** жидкости и продуктов её разложения заключается в недорогой возможности переработки, повторного использования или утилизации после окончания срока эксплуатации.

**Температурой застывания** называют такую наиболее высокую температуру, при которой поверхность уровня масла, залитого в стандартную пробирку, не перемещается при наклоне пробирки на  $45^\circ$  в течение 5 мин. Эта температура характеризует жидкость с точки зрения сохранения текучести, а следовательно, возможности транспортировки и слива в холодное время года.

Температура застывания масла должна быть не менее чем на  $10$  —  $17^\circ\text{C}$  ниже наименьшей температуры окружающей среды, в условиях которой будет работать гидросистема.

**Температурой замерзания** называют температуру начала кристаллизации, т.е. температуру, при которой в жидкости образуется облачко из мельчайших кристаллов. При этом не должно быть расслаивания жидкости и выделения из нее составных компонентов.

Жидкость не должна содержать легкоиспаряющиеся компоненты, испарение которых может привести при продолжительной эксплуатации к загустению жидкости.

**Огнестойкость жидкостей** выражается в том, что жидкость не должна быть причиной возникновения или распространения пожара.

С точки зрения огнестойкости жидкости характеризуются **температурами вспышки, воспламенения и самовоспламенения**. Под температурой вспышки понимается минимальная температура, при которой над поверхностью жидкости образуется количество пара, достаточное для возникновения кратковременной вспышки. Температурой воспламенения называется такая температура, при которой количество выделяющегося пара таково, что горение продолжается после удаления источника огня. Температурой самовозгорания называется такая температура, при которой жидкость или ее пар вспыхивает при контакте с воздухом без внешнего источника воспламенения.

Температура воспламенения масел на нефтяной основе находится в пределах  $180$ — $230^\circ\text{C}$ , а температура самовозгорания от  $260$ — $370^\circ\text{C}$  и выше.

**Негорючесть** во многих случаях является решающим свойством при выборе типа рабочей жидкости. В гидросистемах, расположенных близко к источникам тепла или огня необходимы негорючие жидкости.

Более высокой пожарной безопасностью, по сравнению с минеральными, обладают синтетические жидкости. Они практически не горят при возможных высоких температурах и не распространяют огня. При работе с минеральными маслами при температуре выше  $70^\circ\text{C}$  необходимо устранять контакт с воздухом. Для этого баки при  $70^\circ\text{C}$  и выше необходимо заполнять инертным газом (азотом, аргоном или гелием). Этого же эффекта можно достичь механическим разделением газовой и жидкостной сред.

**Диэлектрические свойства.** Встречаются случаи, когда важными являются изолирующие и диэлектрические свойства жидкости.

Большинство жидкостей для гидросистем - хорошие изоляторы. Такое свойство позволяет помещать в них электрические агрегаты и их элементы (соленоиды, обмотки электродвигателей и пр.) без дополнительной изоляции. Однако в этом случае в жидкостях не должно быть металлических присадок и металлических продуктов износа. Они также не должны содержать воду.

**Воздействие жидкости на резиновые детали.** Важным свойством рабочих жидкостей для гидросистем является воздействие их на материалы конструктивных элементов, и, в частности, на резиновые детали гидроагрегатов, которые используются в качестве уплотнений. Изменение их свойств, происходящее под воздействием жидкости, сопровождается нарушением герметичности и другими ошибками в работе гидросистем.

Ни одна рабочая жидкость не обладает абсолютной инертностью. Поэтому важно, чтобы она не критично ухудшала основные качества материала уплотнительных устройств. В результате длительного контакта рабочей жидкости с резиновыми деталями могут изменяться их объем, вес, прочность и другие механические свойства деталей. Особо следует отметить влияние на резину синтетических жидкостей, одни из которых вызывают либо чрезмерное набухание уплотнительного материала, либо, наоборот, значительную его усадку.

**Цена** рабочей жидкости должна быть по возможности невысокой.

Перечисленные свойства гидравлических рабочих жидкостей, к сожалению, не носят постоянный характер. В процессе работы гидросистем происходит изменение их характеристик.

## **Изменение характеристик рабочих жидкостей**

Наиболее существенным фактором, влияющим на свойства рабочих жидкостей, является количество и состав частиц загрязняющих эту жидкость.

Загрязнение рабочих жидкостей гидросистемы может происходить

- во время поставки жидкостей, хранения и заправки их в гидросистему,
- в процессе изготовления, сборки и испытания элементов гидросистемы,
- в процессе эксплуатации,
- за счёт распада самой жидкости под действием различных факторов.

### **Загрязнение во время поставки, хранения и заправки**

Различные присадки и добавки, предназначенных для улучшения эксплуатационных свойств жидкости в процессе транспортировки и хранения могут выделяться из жидкости, превращаясь в загрязняющие вещества. При длительном хранении в условиях положительных температур в маслах могут

развиваться колонии микроорганизмов, водорослей и грибков. Размер отдельных грибков и бактерий, а также их спор составляет, как правило, **1 – 2 мкм**, однако может достигать и **10 мкм**. В основном их наблюдают на границе масло – вода. Непрерывно идёт процесс окисления масла. Активность этого процесса повышается с увеличением температуры и при наличии в масле эмульгированного воздуха. Катализатором окисления являются частицы износа из чёрных и цветных металлов. При окислении в масле образуются растворимые и нерастворимые продукты, которые способствуют его сгущению и могут, в конечном счёте, выпадать в виде осадка на детали гидроаппаратов и гидромашин. Мельчайшие нерастворимые продукты окисления коагулируют и укрупняются. Замечены случаи «самопроизвольного» увеличения размеров частиц загрязнений в герметически закрытых сосудах. Например, если при заправке в жидкости были зафиксированы частицы не более **10 мкм**, то со временем обнаруживались частицы размером **25 – 200 мкм** в виде рыхлых образований. Быстрый рост размера частиц происходит в жидкости, подвергающейся тряске при транспортировке. Жидкость может загрязняться частицами пыли из воздуха. Пыль поступает в баки через систему наддува и дренажа, через заливные горловины при «открытой» заправке баков. Пыль всегда присутствует в атмосфере. В одном литре воздуха число пылинок может изменяться от **10** до **200000**. Предельная крупность частиц пыли в воздухе составляет **50 мкм**, основную массу пыли составляют пылинки размером менее **10 мкм**. В их составе:

- до **80%** - кварц твёрдостью **7** единиц по десятибалльной шкале (Мооса),
- до **17%** - окись алюминия с твёрдостью **9** единиц,
- полевой шпат с твёрдостью **6 - 6,5** единиц,
- другие компоненты.

Для сравнения: твёрдость алмаза по десятичной шкале – **10**, железа – **4,4**, меди – **3,0**, алюминия – **2,9**.

Таким образом, большая доля частиц пыли соизмерима с зазорами в подвижных узлах гидроагрегатов, а твёрдость некоторых компонентов загрязнений значительно превосходит твёрдость материалов сопрягаемых деталей.

### **Загрязнение в процессе изготовления, сборки и испытания**

Большое количество частиц загрязнения остаётся в гидросистеме и её элементах после изготовления и ремонта. Это песок, попадающий при литье; пыль, осевшая на стенках; окалина от сварки,ковки или термической обработки; остатки механической обработки деталей; заусенцы от трубопроводов; волокна ветоши, остающиеся после протирки. Притирочные пасты, применяемые при доводке гидроагрегатов, образуют смешанные с парафином, стеарином, воском и др. абразивные зёрна (карбиды бора и кремния, белый

электрокорунд, алмазная пыль), твёрдость которых превышает твёрдость большинства конструкционных материалов. Паста при обработке деталей обычно накапливается в глухих ответвлениях системы и при её работе постепенно вымывается, циркулируя вместе с рабочей жидкостью.

### **Загрязнение в процессе эксплуатации**

Наибольшее количество частиц загрязнения попадает в рабочие жидкости в процессе эксплуатации гидросистемы. За счёт износа её элементов рабочие жидкости загрязняются непрерывно самыми различными видами загрязнителей – ржавчиной, резиной, металлом, абразивными частицами, волокнистыми частицами, краской, пылью. Особенно интенсивный износ наблюдается в парах трения, дроссельных элементах, рабочих камерах гидромашин, распределительных устройствах плунжерных насосов и т.д. Продукты износа трущихся деталей поступают в жидкость непрерывно. При микроанализе проб жидкости было установлено, что размер металлических продуктов износа, генерируемых в рабочую жидкость, составляет от **1** до **10 мкм**.

Совместное воздействие влаги, кислорода воздуха и рабочей жидкости может вызвать на поверхности деталей, трубопроводов, баков образование ржавчины и шелушение покрытий. Частицы ржавчины выпадают в виде осадка частиц микронных размеров. Этому способствует вибрация конструкции и пульсации давления.

Кроме того, загрязнения в жидкость попадают при обслуживании системы, при небрежном монтаже агрегатов, шлангов и трубопроводов, через незаглушенные соединительные узлы, из-за загрязнённости инструментов, запорочных средств, одежды обслуживающего персонала.

Источником загрязнения топлив и масел в некоторых случаях могут служить также сами фильтры, предназначенные для очистки жидкости. В процессе работы фильтрующие элементы частично разрушаются и их компоненты вымываются потоком жидкости. Такого типа загрязнения наблюдаются у всех фильтров с волокнистыми наполнителями, изготовленными, например, из бумаги, шерсти, войлока, целлюлозы, стекловолокна и т.п. Кроме того, при использовании волокнистых наполнителей, которые могут изменять пористость при увеличении перепада давлений во время гидроударов и пульсаций давления, задержанные фильтром частицы загрязнения медленно проходят через фильтроэлемент и вновь попадают в рабочую жидкость.

### **Распад жидкости под действием различных факторов**

Рабочая жидкость в процессе хранения, транспортировки, заправки и эксплуатации подвергается воздействию различных видов энергии, вступает в контакт с различными видами материалов (металлами, полимерами, кислотами, водой и т.д.), многие из которых являются катализаторами химических процессов. Постоянно воздействующим фактором является тепловая энергия,

иногда радиационная и электрическая. Эти виды энергии определяют интенсивность статических процессов старения. Старением называют изменение свойств вещества во времени. В динамических условиях, в дополнение к этим видам энергии, на масло действуют механическая энергия при сжатии и разрежении, волновая механическая энергия при вибрациях, звуковых и ультразвуковых колебаниях. В результате этих воздействий в рабочей жидкости происходит комплекс физико-химических изменений, которые можно разделить на три группы.

1. Изменения физического характера: испарение компонентов масла, проникновение в жидкость продуктов изнашивания, растворение газов, воды и компонентов эластомеров, изменение количественного состава присадок за счёт образования сорбционных плёнок на поверхностях контактирующих деталей.
2. Изменения химического характера: окисление углеводородов базового масла и присадок вследствие присутствия в масле воды и водных растворов, реакции присадок масла с материалами гидросистемы и другие химические процессы
3. Изменения механохимического характера: участие масла в процессах трения, перемешивания, а также стимулирующее влияние механических воздействий на химические реакции.

## **Последствия загрязнения рабочей жидкости**

Надежность работы гидропривода находится в непосредственной зависимости от чистоты рабочей жидкости. В большинстве случаев наблюдаются следующие нарушения работы и повреждения, вызванные загрязнением:

- затруднённость движения или полная остановка,
- ошибки позиционирования привода,
- отклонения от заданной скорости движения гидродвигателя,
- скачкообразность движения привода при плавном изменении управляющего сигнала,
- уменьшение жёсткости системы из-за увеличения утечек в гидроагрегатах,
- порча поверхности штоков и валов гидродвигателей,
- порча поверхности сёдел клапанов.

Эти повреждения значительно ухудшают качество выполняемых операций технологических операций и ведут к производству бракованных изделий.

Кроме этого, наличие загрязнения в жидкости необходимо учитывать при разработке элементов гидросистем. Например: силы, требуемые для перемещения плунжеров распределителей, измеряемые десятками долями Ньютона, могут при наличии загрязнения возрасти в сотни раз, вызвав нарушение нормальной работы гидросистемы и даже выход из строя отдельных её участков. Чтобы гарантировать надёжную работу, для преодоления сил трения

плунжеров применяют электромагниты с большим тяговым усилием, достигающим **150 Н**. Такие устройства имеют большие размеры и массу, и малый срок службы, так как большие инерционные силы, развиваемые якорем при его втягивании, быстро разбивают электромагнит, что ведёт к увеличению затрат на обслуживание системы. В то же время, большие пусковые токи требуют мощных контактных устройств в системах электропитания.

Загрязнения в жидкости существенно влияют также на срок службы гидроаппаратов и гидромашин. Жидкость со взвешенными твёрдыми частицами при течении с большой скоростью, достигающей в некоторых участках систем **300 м/с**, притупляет, подобно абразивной эмульсии, кромки распределительных отверстий. От этого с течением времени увеличиваются зазоры, уменьшаются перекрытия, изменяются коэффициенты расхода и сопротивления сопел и точных (калиброванных) отверстий.

Из вышеизложенного следует, что необходимо постоянно контролировать степень чистоты рабочей жидкости во время заправки и работы оборудования, т.к. это может способствовать своевременному предупреждению отказов в работе гидросистем. Для каждой гидросистемы в зависимости от её назначения и выполняемых функций, планируемой надёжности и срока службы аппаратуры должна быть назначена определённая степень чистоты рабочей жидкости.

Определение класса чистоты рабочей жидкости.

В большинстве случаев для оценки степени чистоты жидкости используются следующие показатели:

- масса частиц загрязнения в единице объема жидкости,
- объем механических включений в единице объема жидкости,
- количество частиц разных размеров в единице объема жидкости.

Степень чистоты рабочей жидкости определяется на основе нескольких стандартов: **ГОСТ 6370 – 59, 10227 – 62, 10577 – 63** и других. Приведем пример некоторых из них. По **ГОСТ 6370 – 59** жидкость считается чистой, если содержание загрязняющих частиц в ней не превышает **0,005 %**, что составляет **50 мг/л**. Общей массой частиц загрязнения нельзя до конца охарактеризовать степень загрязненности, так как при одинаковой массе количество частиц может сильно изменяться.

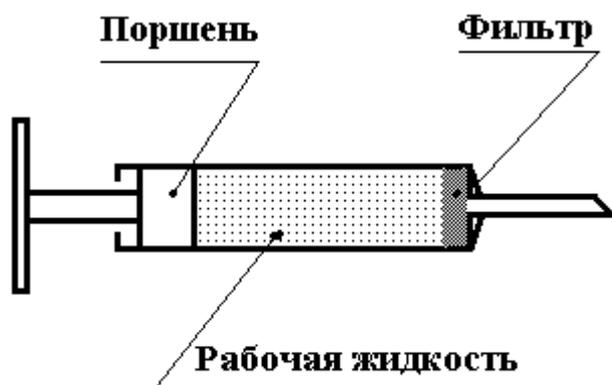
В **ГОСТ 17216 – 2001** загрязненность определяется иначе. Этот стандарт устанавливает **19** классов чистоты рабочей жидкости (см. приложение), каждому из которых соответствует определенное число частиц различного размера, содержащихся в **0,1 л** жидкости.

Международная ассоциация транспортной авиации рекомендует использовать в качестве рабочей среды жидкость с частицами загрязнения не больше **5 мкм** и с ограниченным числом меньших размеров.

По проекту международной организации **ИСО/ТК 131** классы чистоты жидкости устанавливаются по размерам частиц более **15 мкм**.

Существуют и другие методы определения загрязненности рабочей среды.

Во всех случаях контроля чистоты жидкость должна быть перемешана, либо проба должна сниматься не позже одной минуты после остановки гидросистемы. Приспособление для извлечения пробы должно исключать проникновение в пробу частиц загрязнения извне как во время взятия, так и во время транспортирования, что обеспечивает проведение максимально точного анализа.



Кроме перечисленных существует ещё целый ряд требований к проведению подобных анализов.

Метод анализа степени чистоты рабочей жидкости ориентирован на **ГОСТ 17216-2001**, который учитывает количество и размер частиц загрязнения в **100 см<sup>3</sup>** жидкости и классифицирует жидкость по 19

классам чистоты. Обычно такой анализ проводится следующим образом. С помощью специального заборного устройства, по внешнему виду и принципу действия напоминающему шприц, набирается проба жидкости в объёме **100 см<sup>3</sup>**. Далее эта жидкость пропускается через фильтроэлемент, на котором остаются частицы загрязнения. После этого с помощью микроскопа проводится подсчёт частиц, осевших на фильтре с учетом их размеров. Такой метод - очень длительный и трудоёмкий процесс. При его использовании субъективная погрешность оператора может достигать **100%**, а время, затрачиваемое на анализ одной пробы (одного фильтроэлемента), - нескольких часов.

## Применяемые жидкости

В гидросистемах машин технологического назначения чаще всего применяют специальные жидкости минерального происхождения с диапазоном вязкости при **50<sup>0</sup> C** примерно **10–175 сСт**. Минеральные масла, применяемые в качестве рабочих жидкостей гидросистем, отличаются от минеральных смазочных (машинных) масел тем, что они содержат присадки, придающие им специфические свойства, отсутствующие у смазочных масел. Так, например, для получения минимальной зависимости вязкости от температуры применяют вязкостные присадки.

## Лекция 4. Гидростатика

*Гидростатика* – раздел гидромеханики, изучающий законы равновесия неподвижной жидкости, находящейся под действием внешних сил.

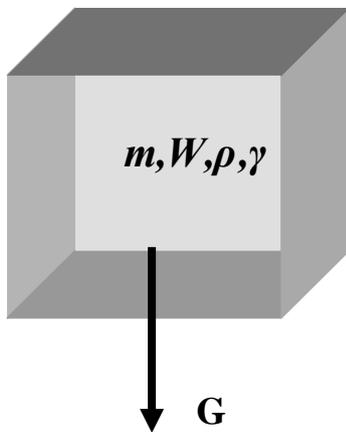
Вследствие действия этих сил внутри жидкости возникают напряжения сжатия, которые в гидравлике называются *давлением* и обозначаются буквой *P*. В гидростатике силы, действующие на жидкость, принимаются не зависящими от времени. С учётом этого положения можно считать, что напряжения, возникающие в жидкости под действием внешних сил, зависят только от координат точки *X, Y, Z* в жидкости. Таким образом, основными задачами гидростатики являются определение давления в жидкости как функции координат

$$P = f_P(X, Y, Z),$$

а также определение сил, действующих со стороны жидкости на твёрдые стенки.

### Силы, действующие в жидкости

#### Массовые силы



Массовые силы это силы, пропорциональные массе жидкости. В случае однородной жидкости эти силы пропорциональны объёму. Прежде всего, к ним относится *вес* жидкости

$$G = mg = W\rho g = W\gamma,$$

где  $G$  – вес жидкости,

$W$  – объём жидкости,

$m$  – масса жидкости,

$g$  – ускорение свободного падения,

$\rho$  – плотность жидкости,

$\gamma$  – удельный вес жидкости.

Как известно, масса является мерой инертности тела. Это свойство присуще и жидкостям, поэтому к массовым силам относятся и *силы инерции*:

$$F_{ин} = m \frac{dV}{dt} = \rho W \frac{dV}{dt} = ma;$$

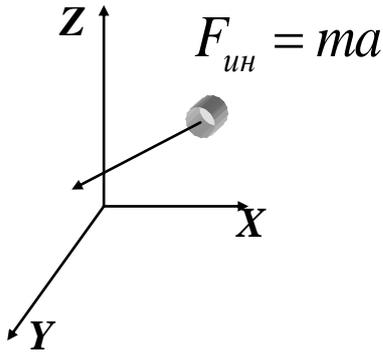
где  $F_{ин}$  – инерционная сила,

$V$  – скорость жидкости,

$t$  – время движения,

$a$  – ускорение движения.

Силы инерции, действующие в жидкости, так же как и для твёрдого тела, могут проецироваться на оси.



$$F_{ин}^x = m \frac{dV_x}{dt} = ma_x,$$

$$F_{ин}^z = m \frac{dV_z}{dt} = ma_z,$$

$$F_{ин}^y = m \frac{dV_y}{dt} = ma_y;$$

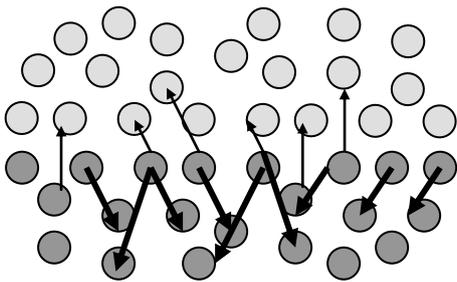
где  $F_{ин}^x$ ,  $F_{ин}^y$ ,  $F_{ин}^z$  - проекции сил инерции на соответствующие оси.

## Поверхностные силы

Поверхностные силы – силы, величины которых пропорциональны площади. К ним относят два вида сил. Силы **поверхностного натяжения** и силы **вязкого трения**. Последние проявляются только при движении жидкости и не играют никакой роли, когда жидкость находится в покое. Эти силы, как свойство вязкости, были рассмотрены при изучении свойств жидкостей.

### Силы поверхностного натяжения

Молекулы жидкости притягиваются друг к другу с определённой силой. Причём внутри жидкости силы, действующие на любую молекулу, уравновешиваются, т.к. со всех сторон от неё находятся одинаковые молекулы, расположенные на одинаковом расстоянии.



Однако молекулы жидкости, находящиеся на границе (с газом, твёрдым телом или на границе двух несмешивающихся жидкостей) оказываются в неравновешенном состоянии т.к. со стороны другого вещества действует притяжение других молекул, расположенных на других расстояниях. Возникает преобладание какой-то

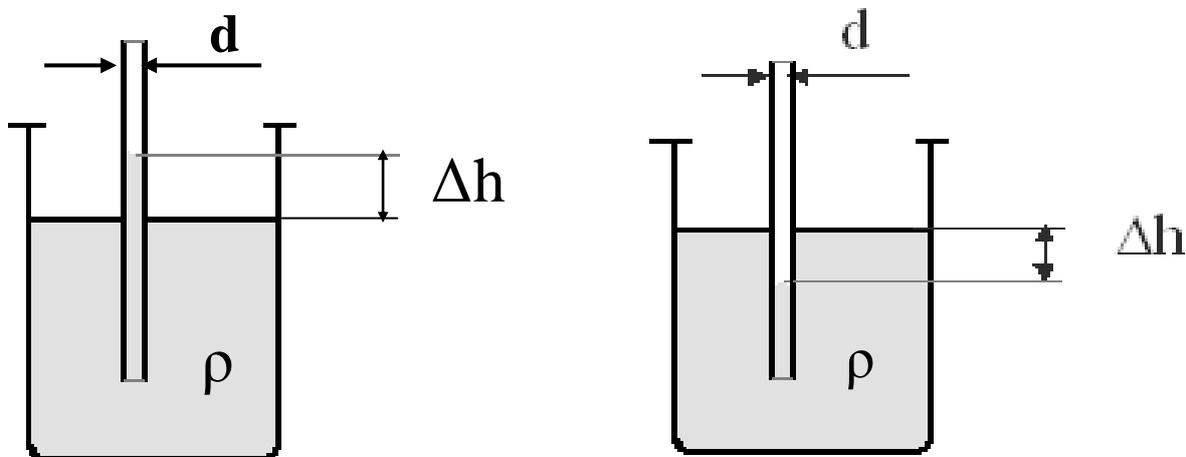
силы. Под влиянием этого воздействия поверхность жидкости стремится принять форму, соответствующую наименьшей площади. Если силы внутри жидкости больше наружных сил, то поверхность жидкости стремится к сферической форме. Например, малые массы жидкости в воздухе стремятся к шарообразной форме, образуя капли. Может иметь место и обратное явление, которое наблюдается как явление **капиллярности**. В трубах малого диаметра (капиллярах) наблюдается искривление свободной поверхности, граничащей с газом или с парами этой же жидкости. Если поверхность трубки смачивается, свободная поверхность жидкости в капилляре вогнутая. Если нет смачи-

вания, свободная поверхность выпуклая, как при каплеобразовании. Во всех этих случаях силы поверхностного натяжения обуславливают дополнительные напряжения  $p_{нов}$  в жидкости. Величина этих напряжений определяется формулой

$$p_{нов} = \frac{2\sigma}{r}.$$

где  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения,  
 $r$  - радиус сферической поверхности, которую принимает жидкость.

Эти дополнительные напряжения легко наблюдать, если в сосуд с жидкостью погрузить капилляр. В этом опыте возможны два варианта. В первом случае



жидкость, за счёт поверхностных сил, поднимется по капилляру на некоторую высоту. Тогда говорят о **капиллярном поднятии**, и наблюдается явление **смачивания**. Во втором варианте жидкость опускается в капилляре ниже уровня жидкости в сосуде. Такое явление называют **капиллярным опусканием**, которое происходит при **несмачивании**.

В обоих случаях величина  $\Delta h$  пропорциональна дополнительному напряжению, вызванному в жидкости поверхностными силами. Она равна

$$\Delta h = \frac{4\sigma}{gd\rho};$$

где  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения,  
 $d$  - диаметр капилляра,  
 $k$  - коэффициент пропорциональности, который выражается следующей формулой

$$k = \frac{4\sigma}{g\rho},$$

и зависит от жидкости. Например, при  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $k$  спирта составляет **11,5**, ртути **-10,15** а воды - **30**.

Поднятие воды в капиллярах почвы и грунтов является важным фактором в распространении воды. Высота капиллярного поднятия в грунтах изменяется от нуля (галечники) почти до 5 м (глины). При этом с увеличением минерализации воды высота капиллярного поднятия увеличивается.

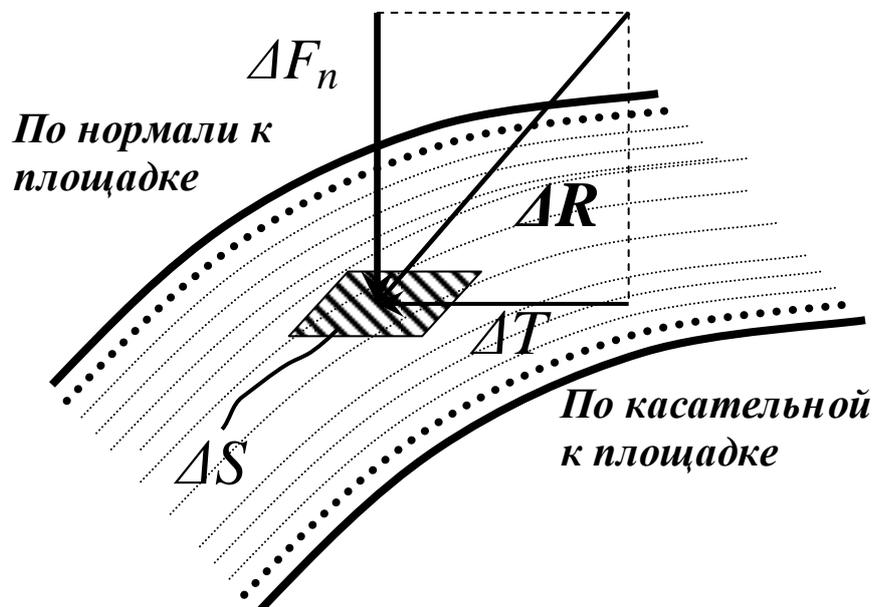
Поверхностное натяжение и капиллярные эффекты определяют закономерности движения жидкости в условиях невесомости.

К поверхностным силам относятся и силы давления, т.к. они действуют на поверхности жидкости.

## Силы давления

**Давление** – напряжение, возникающее в жидкости под действием сжимающих сил.

В общем случае поверхностная сила  $\Delta R$ , действующая на площадке  $\Delta S$  под некоторым углом к ней, может быть разложена на нормальную



$\Delta F_n$  и тангенциальную  $\Delta T$  составляющие. Первая, направленная внутрь объема, называется силой давления, вторая – силой трения. Нормальная составляющая вызывает в жидкости нормальные напряжения или *гидромеханическое давление*, которое в покоящейся жидкости называется *гидростатическим*. Если сила  $\Delta F_n$  равномерно распределена по площадке  $\Delta S$ , то

$$\Delta P = \frac{\Delta F_n}{\Delta S},$$

или переходя, к пределу

$$dP = \frac{dF}{dS}.$$

В любом случае причиной возникновения давления является внешняя сила, приложенная к жидкости. Часто в гидроприводе такой силой является нагрузка  $F$ , приложенная к исполнительному органу. Эта нагрузка воздействует на жидкость через какую-то жёсткую поверхность и, следовательно, распределена равномерно, например площадь поршня гидроцилиндра  $S$ . В таком случае давление  $P$  определяется по формуле

$$P = \frac{F}{S} .$$

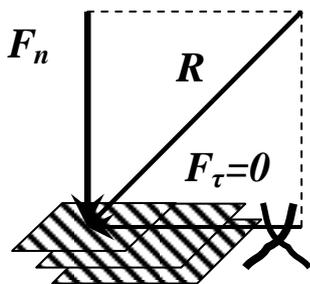
Если давление отсчитывается от нуля, оно называется *абсолютным* и обозначается  $P_{абс}$ , если от атмосферного, – *избыточным* и обозначается  $P_{изб}$ . *Атмосферное* давление обозначается  $P_{атм}$ .

Кроме того, различают давление *гидродинамическое* и *гидростатическое*. Гидродинамическое давление возникает в движущейся жидкости. Гидростатическое давление – давление в покоящейся жидкости.

### Свойства гидростатического давления

*Первое свойство* формулируется следующим образом: на внешней поверхности жидкости гидростатическое давление всегда направлено по нормали внутрь рассматриваемого объёма.

В приведённой формулировке «внешняя поверхность» это любая поверхность, которую можно выделить внутри жидкости (даже мысленно), или поверхность раздела сред.



Доказывается первое свойство путём рассуждений методом «от противного».

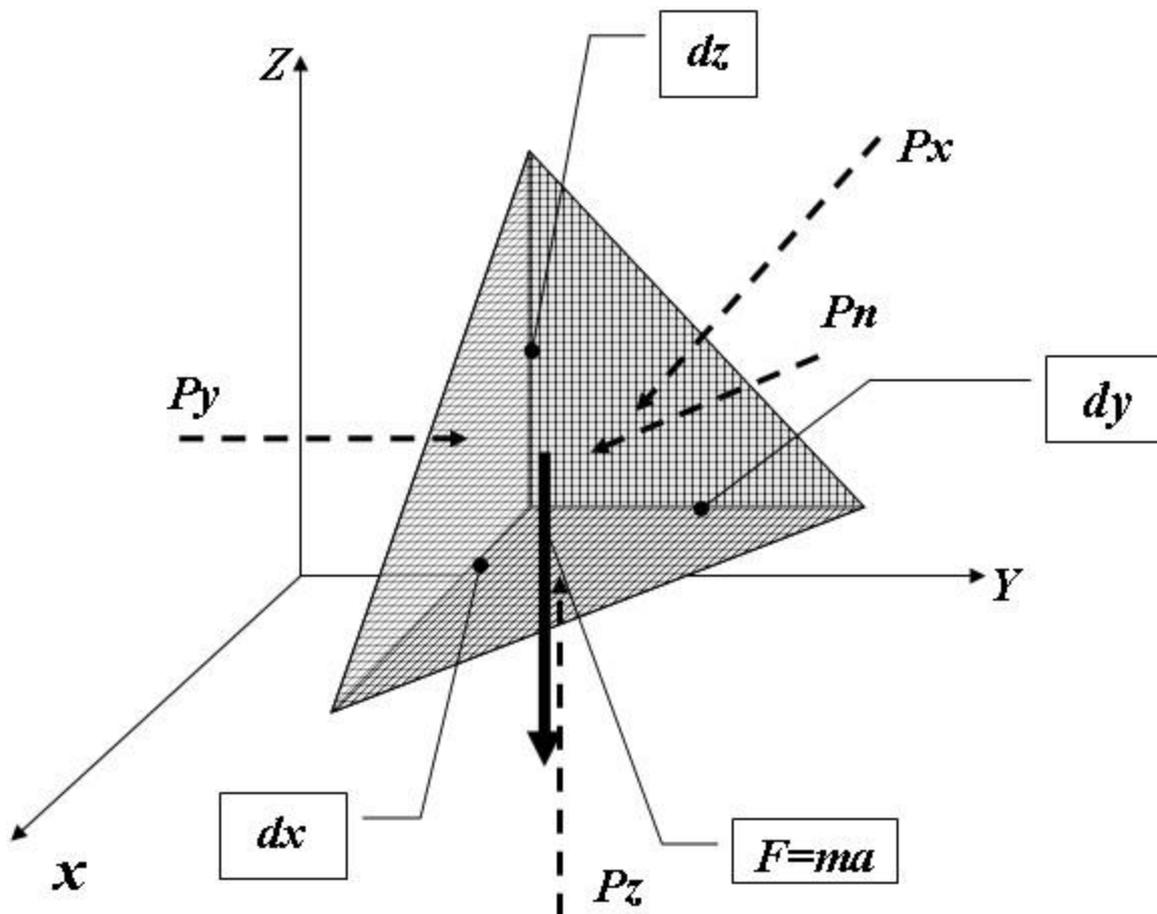
Рассмотрим покоящуюся жидкость. Известно, что жидкость плохо сопротивляется касательным усилиям. Если бы сила, от давления  $R$  действовала бы не по нормали к площадке, то её можно было бы представить в виде двух составляющих – нормальной  $F_n$  и касательной  $F_\tau$ . Тогда касательная составляющая смещала бы слои жидкости друг относительно друга. Это означало бы, что жидкость не находилась бы в покое. Это противоречит начальному утверждению.

Из первого свойства следует, что напряжение сжатия - единственный вид напряжений в покоящейся жидкости

*Второе свойство* состоит в том, что в любой точке внутри жидкости давление по всем направлениям одинаково. Иначе это свойство давления звучит так: на любую площадку внутри объёма жидкости, независимо от её угла наклона, действует одинаковое давление.

Докажем второе свойство. Для этого рассмотрим произвольный объём в неподвижной жидкости в виде прямоугольного тетраэдра с размерами

$d_x, d_y, d_z$ . Будем рассматривать этот объём в некоторой произвольной системе координат  $X, Y, Z$ .



На рисунке приведены следующие буквенные обозначения:

$P_x, P_y, P_z$  - гидростатическое давление, действующее на грань, перпендикулярную соответствующей оси,

$P_n$  - гидростатическое давление, действующее на наклонную грань  $dS$ ,  
 $F$  - инерционные силы (или силы веса).

Тетраэдр  $dx, dy, dz$  по определению находится в покое, следовательно, сумма сил, действующих на него равна  $0$ , т.е.

$$\sum_{x,y,z} F_{x,y,z} = 0.$$

Подробно рассмотрим эти силы. Прежде всего, на выделенный тетраэдр действуют силы давления. В проекциях на оси системы координат по направлению каждой из осей действует сила от давления на грань, перпендикулярную этой оси. Этой силе противодействует проекция на соответствующую ось силы давления на наклонную (большую) грань тетраэдра. Получаются три пары сил, соответственно осям:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} P_x d_z d_y - P_n dS \cos(\hat{x}, n) \\ \frac{1}{2} P_y d_x d_z - P_n dS \cos(\hat{y}, n) \\ \frac{1}{2} P_z d_x d_y - P_n dS \cos(\hat{z}, n). \end{cases}$$

Вместе с силами давления, в общем случае, на тетраэдр действуют инерционные силы (или в простейшем случае сила веса), которые равны произведению массы на проекцию ускорения на соответствующую ось. Массу определим как произведение плотности жидкости и объёма тетраэдра. Объём для прямоугольного тетраэдра равен  $\frac{1}{6} dx dy dz$ . В этом случае инерционные силы примут вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_x \\ \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_y \\ \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_z \end{cases}.$$

Сложив обе полученные системы уравнений, и, приравняв их  $\mathbf{0}$  по причине равновесия тетраэдра, получим общую систему уравнений сил, действующих в покоящейся жидкости:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} P_x d_z d_y - P_n dS \cos(\hat{x}, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_x = 0 \\ \frac{1}{2} P_y d_x d_z - P_n dS \cos(\hat{y}, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_y = 0 \\ \frac{1}{2} P_z d_x d_y - P_n dS \cos(\hat{z}, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_z = 0. \end{cases}$$

Если учесть, что площадь каждой грани тетраэдра, параллельной плоскостям координат, равна площади проекции наклонной грани на соответствующую координатную плоскость, получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} d_z d_y = dS \cos(\hat{x}, n) = \frac{1}{2} d_x d_z = dS \cos(\hat{y}, n) = \frac{1}{2} d_x d_y = dS \cos(\hat{z}, n).$$

Разделив уравнения сил на соответствующие одинаковые площади, получим:

$$\begin{cases} P_x - P_n + \frac{1}{3} dx \rho a_x = 0 \\ P_y - P_n + \frac{1}{3} dy \rho a_y = 0 \\ P_z - P_n + \frac{1}{3} dz \rho a_z = 0 \end{cases}$$

Устремив размеры тетраэдра к  $0$ , т.е.  $d_x, d_y, d_z \rightarrow 0$  и  $dS \rightarrow 0$  последняя система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} P_x - P_n = 0 \\ P_y - P_n = 0 \\ P_z - P_n = 0 \end{cases}$$

Приравняв все три уравнения, получим следующее равенство:

$$P_x = P_y = P_z = P_n.$$

В результате можно сделать следующий вывод: давление не зависит от направления, или другими словами: **давление - величина скалярная**.

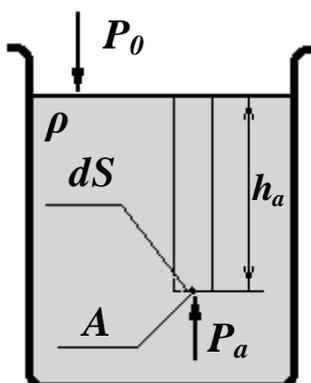
Однако возникает вопрос, каким образом получается, что давление и площадь величины скалярные, а их произведение сила – величина векторная.

$$\vec{F} = P \times S - ?$$

Ответ на этот вопрос заключается в следующем. Направление **вектора силы** задаёт площадку, на которую действует давление. Это направление всегда **перпендикулярно площадке действия** и направлено внутрь рассматриваемого объёма.

## Основное уравнение гидростатики

Определим теперь величину давления внутри покоящейся жидкости. С этой целью рассмотрим произвольную точку  $A$ , находящуюся на глубине  $h_a$ . Вблизи этой точки выделим элементарную площадку  $dS$ . Если жидкость по-



коится, то и т.  $A$  находится в равновесии, что означает уравновешенность сил, действующих на площадку.

$A$  – произвольная точка в жидкости,

$h_a$  – глубина т.  $A$ ,

$P_0$  – давление внешней среды,

$\rho$  – плотность жидкости,

$P_a$  – давление в т.  $A$ ,

$dS$  – элементарная площадка.

Сверху на площадку действует внешнее давление  $P_0$  (в случае, если свободная поверхность грани-

чит с атмосферой, то  $P_0 = P_{атм}$ ) и вес столба жидкости. Снизу – давление в т.  $A$ . Уравнение сил, действующих на площадку, в этих условиях примет вид:

$$dSP_0 + dSh_a g\rho = P_a dS.$$

Разделив это выражение на  $dS$  и учтя, что т.  $A$  выбрана произвольно, получим выражение для  $P$  в любой точке покоящейся жидкости:

$$P = P_0 + \rho gh;$$

где  $h$  – *глубина жидкости*, на которой определяется давление  $P$ .

Полученное выражение носит название *основного уравнения гидростатики*.

## Следствия основного уравнения гидростатики

Во-первых, из основного уравнения гидростатики следует, что для любой точки жидкости в состав величины давления входит  $P_0$  - давление, которое приложено к граничной поверхности жидкости извне. Эта составляющая одинакова для любой точки жидкости. Поэтому из основного уравнения гидростатики следует *закон Паскаля*, который гласит: давление, приложенное к граничной поверхности покоящейся жидкости, передаётся всем точкам этой жидкости по всем направлениям одинаково. Следует подчеркнуть, что давление во всех точках не одинаково. Одинакова лишь та часть (составляющая), которая приложена к граничной поверхности жидкости. Закон Паскаля – основной закон, на основе которого работает объёмный гидропривод, применяемый в абсолютном большинстве гидросистем технологических машин.

Вторым следствием является тот факт, что на равной глубине в покоящейся жидкости давление одинаково. В результате можно говорить о поверхностях равного давления. Для жидкости, находящейся в абсолютном покое или равномерно движущейся, эти поверхности – горизонтальные плоскости. В других случаях относительного покоя, которые будут рассмотрены ниже, поверхности равного давления могут иметь другую форму или не быть горизонтальными. Существование поверхностей равного давления позволяет измерять давление в любой точке жидкости.

## Приборы для измерения давления

Существует два основных типа приборов для измерения давления в жидкости.

К приборам первого типа можно отнести пьезометры. Они представляют собой вертикальную трубку, обычно прозрачную. Если, например, нужно измерить давление в точке  $a$ , то достаточно подсоединить эту трубку к стенке сосуда так чтобы её конец находился на поверхности равного давления,

проходящей через эту точку. В пьезометре установится уровень жидкости, пропорциональный давлению в т. *a*. Абсолютное давление в этой точке будет

$$P_{абс} = P_0 + \rho g h_a.$$

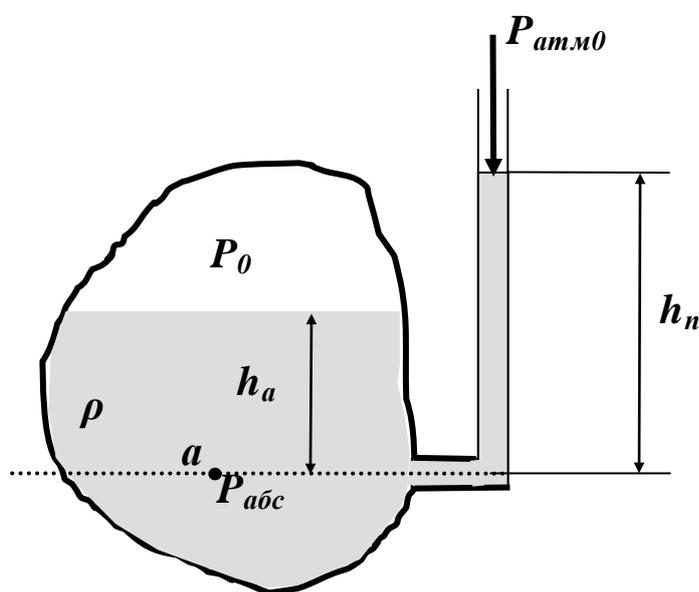
С другой стороны, это же давление можно представить как

$$P_{абс} = P_{атм} + \rho g h_n.$$

Отсюда

$$h_n = \frac{P_0 - P_{атм} + \rho g h_a}{\rho g} = \frac{P_{изб} - P_{атм}}{\rho g}.$$

Величина  $h_n$  называется *пьезометрической высотой*. По её величине судят о величине давления.

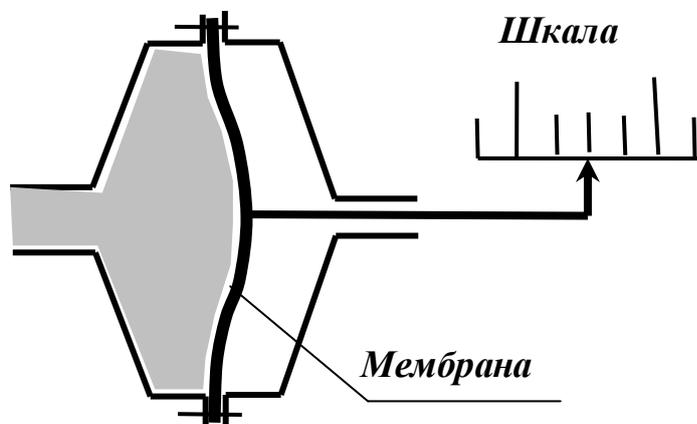


Если абсолютное давление меньше атмосферного  $P_{абс} < P_{атм}$ , то в жидкости имеет место разрежение, или вакуум. Такое давление называют *вакуумметрическим давлением*  $P_{вак}$ , а высоту в пьезометре называют *вакуумметрической высотой*  $h_{вак}$ . Эти величины соответственно равны:

$$P_{вак} = P_{атм} - P_{абс} \quad \text{и}$$

$$h_{вак} = \frac{P_{атм} - P_{абс}}{\rho g}.$$

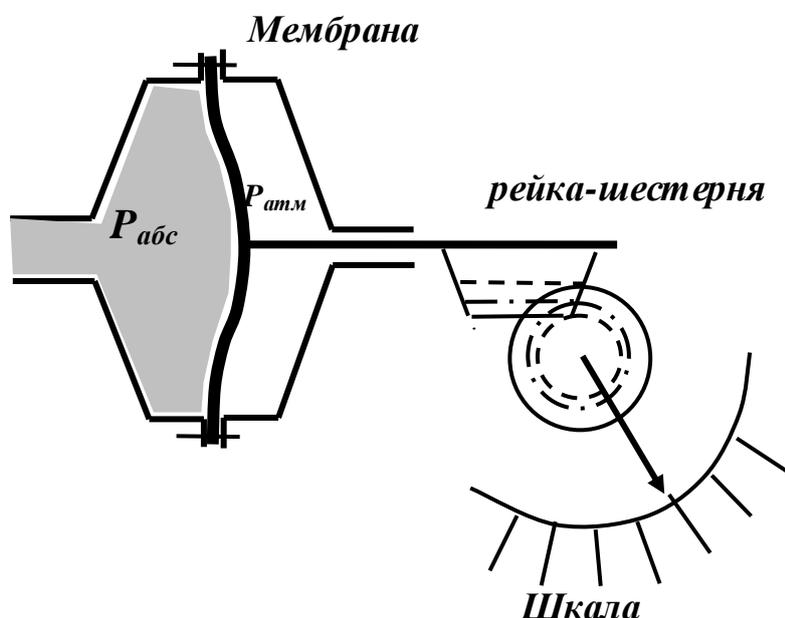
Ко второму типу приборов относятся манометры, которые имеют большое разнообразие по типам размерам и характеристикам. Однако принципиально все эти приборы состоят из чувствительного элемента, который меняет свою форму под воздействием давления, и, связанного с этим элементом, передаточного механизма и регистрирующего прибора (индикатора).



Подсоединять манометры для измерения давления в определённой точке надо также как пьезометры

для измерения давления в определённой точке надо также как пьезометры

зометры, на уровне поверхности равного с выбранной точкой, давления. Например, под действием давления гибкий чувствительный элемент – мембрана изгибается. Размер этого отклонения пропорционален величине измеряемого давления. Вместе с мембраной отклоняется жёстко соединённая с ней стрелка, которая перемещается вдоль шкалы. Такой прибор отличается небольшим отклонением регистрирующего элемента – стрелки, следовательно, точность измерения большой быть не может.



измерения большой быть не может.

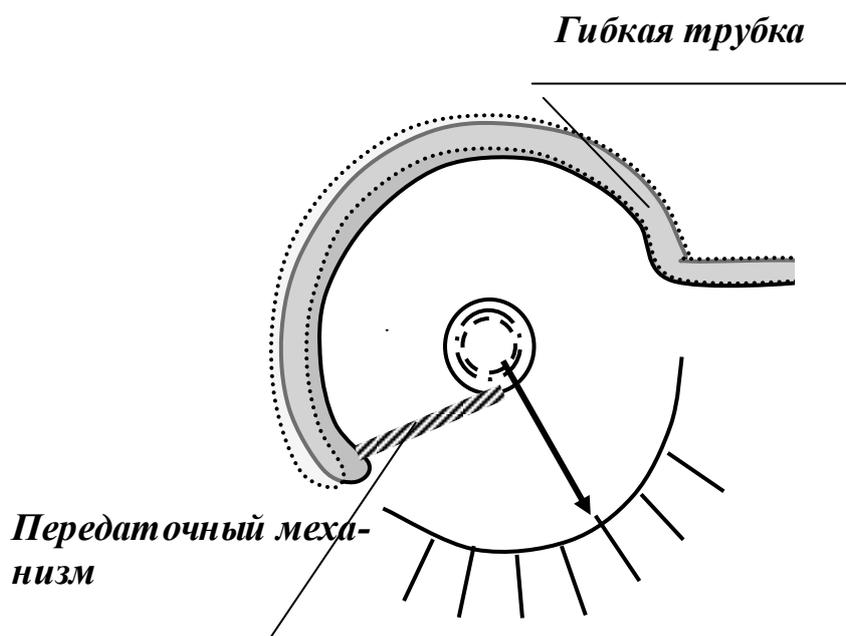
Для увеличения чувствительности прибора мембрану можно соединить с зубчатой рейкой, находящейся в зацеплении с шестерней. Если с последней жёстко соединить стрелку, то при изменении давления она будет поворачиваться по отношению к круговой шкале. В этом случае изгиб мембраны даст большее, чем в первом случае, линейное отклонение конца стрелки. Это увеличит точность показаний прибора.

Общим недостатком таких приборов является малое исходное отклонение чувствительного элемента – мембраны.

Для устранения этого недостатка используются более сложные чувствительные элементы.

Чаще всего таким элементом является полая трубка, согнутая по окружности.

Один конец трубки связан со штуцером для подключения к измеряемому давлению, другой с зубчатым сектором, который связан с шестерней и стрелкой, поворачивающейся вокруг шкалы. При повышении давления трубка

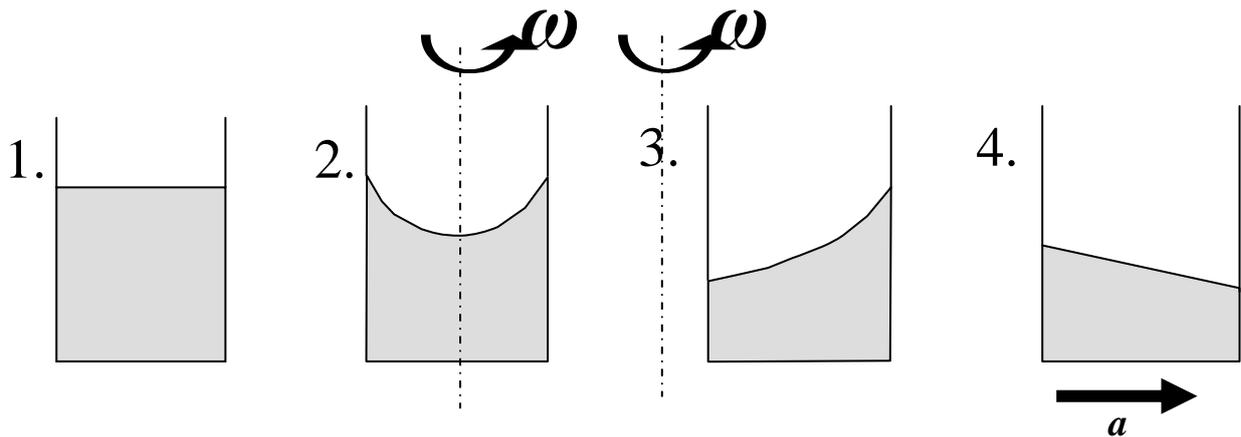


разгибается, и это отклонение значительно больше, чем отклонение мембраны при таком же давлении.

Во всех случаях чувствительный элемент (мембрану или гибкую трубку) можно связать с индуктивным электрическим преобразователем, состоящим из сердечника и электрической катушки. Можно так же использовать пьезокристаллический преобразователь. В обоих случаях будет генерироваться электрический сигнал, пропорциональный величине давления. Этот сигнал после соответствующих электрических аналоговых или цифровых преобразователей можно передавать на большие расстояния и регистрировать стрелочными или цифровыми, например жидкокристаллическими индикаторами. Этот сигнал несложно также передавать для обработки компьютеру.

## Лекция 5. Дифференциальные уравнения равновесия покоящейся жидкости

Дифференциальные уравнения равновесия покоящейся жидкости иначе называют *дифференциальными уравнениями Эйлера*. Они получены для общего случая относительного покоя жидкости. Возможны следующие варианты относительного покоя.



Первый вариант соответствует абсолютному покою или равномерному движению сосуда с жидкостью. Такой вариант рассматривался при выводе основного уравнения гидростатики.

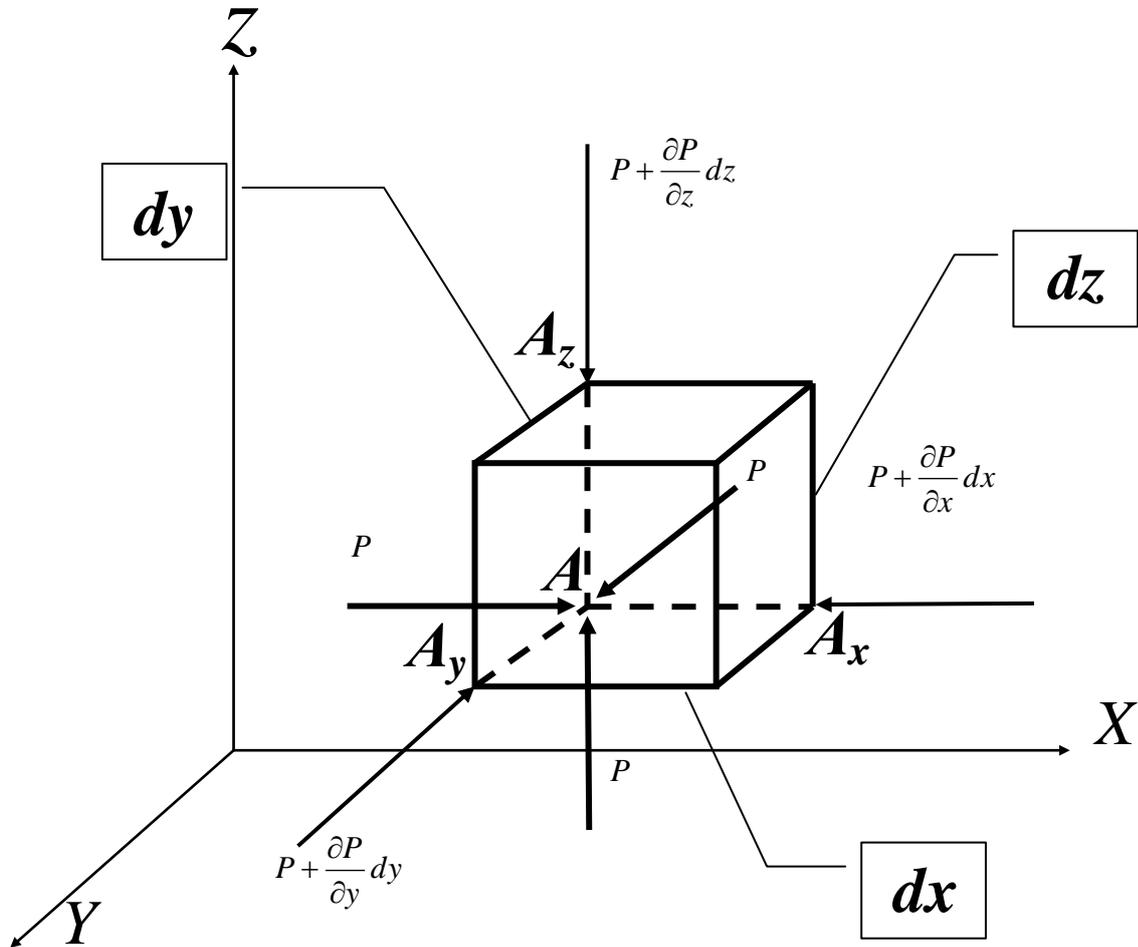
Второй вариант – вращение сосуда с жидкостью с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг центральной оси. Несмотря на то, что вся масса жидкости вращается вместе с сосудом, частицы жидкости друг относительно друга не перемещаются, следовательно, весь объём жидкости, как и в первом случае, представляет собой как бы твёрдое тело. Давление в каждой точке жидкости не меняется во времени и зависит только от координат. По этим причинам жидкость подпадает под определение покоящейся.

Третий вариант аналогичен второму, только вращение осуществляется вокруг произвольно расположенной вертикальной оси. Во втором и третьем случае свободная поверхность жидкости принимает новую форму, соответствующую новому равновесному положению жидкости.

В четвёртом варианте сосуд с жидкостью движется прямолинейно и равноускоренно. Такой случай проявляется, например, в процессе разгона или остановки автоцистерны с жидкостью. В этом случае жидкость занимает новое равновесное положение, свободная поверхность приобретает наклонное положение, которое сохраняется до изменения ускорения. Частицы жидкости друг относительно друга находятся в покое, и давление зависит только от координат.

Во всех перечисленных случаях на жидкость действуют, во-первых, силы веса, во-вторых, силы инерции, в-третьих, силы давления.

Рассмотрим в произвольной системе координат  $X, Y, Z$  произвольную точку  $A$ . Вблизи этой точки выделим элементарный объём  $dx, dy, dz$  в



форме прямоугольного параллелепипеда, грани которого для простоты математических выражений параллельны координатным плоскостям.

Заметим следующее:

- ✓ давление является функцией координат (при этом в любой точке оно по всем направлениям одинаково),
- ✓ при переходе к точкам  $A_x(A_y, A_z)$  меняется только одна координата на бесконечно малую величину  $dx(dy, dz)$ , поэтому функция получает приращение только по одной координате,
- ✓ это приращение равно частному дифференциалу по соответствующей координате  $\frac{\partial P}{\partial x} dx, \frac{\partial P}{\partial y} dy, \frac{\partial P}{\partial z} dz$ .

Таким образом, разность давлений, действующих на противоположные грани параллелепипеда (внутри рассматриваемого объёма), перпендикулярные соответствующим осям, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \Delta P_x = P - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) = -\frac{\partial P}{\partial x} dx \\ \Delta P_y = P - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) = -\frac{\partial P}{\partial y} dy \\ \Delta P_z = P - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz) = -\frac{\partial P}{\partial z} dz. \end{cases}$$

Исходя из этого, определим разности сил, вызванных давлением, в проекции на оси координат

$$\begin{cases} \Delta F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dzdxdy \\ \Delta F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dydxdz \\ \Delta F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz \end{cases}$$

Кроме сил давления на параллелепипед будут действовать инерционные силы  $F^{ин}$  в общем случае определяемые массой и ускорениями  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$

$$\begin{cases} F_x^{ин} = a_x \rho dxdydz \\ F_y^{ин} = a_y \rho dxdydz \\ F_z^{ин} = a_z \rho dxdydz \end{cases}$$

Учитывая, что параллелепипед находится в покое, сумма сил, действующих на него, равна  $\mathbf{0}$ :

$$\begin{cases} a_x \rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = 0 \\ a_y \rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial y} dydxdz = 0 \\ a_z \rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial z} dzdxdy = 0. \end{cases}$$

Разделив систему уравнений сил на массу рассматриваемого параллелепипеда, получим систему уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} a_x - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} = 0 \\ a_y - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} = 0 \\ a_z - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{1}{\rho} = 0. \end{cases}$$

На практике, чтобы избавиться от частных производных, используют одно уравнение, заменяющее систему. Для этого первое уравнение умножают на  $dx$ , второе на  $dy$ , третье на  $dz$  и складывают их:

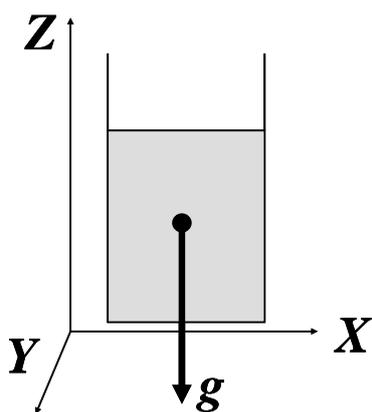
$$a_x dx + a_y dy + a_z dz - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right)}_{dP} = 0.$$

В этой формуле сумма в скобках является полным дифференциалом давления, который в результате оказывается равным

$$dP = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz).$$

Полученное уравнение показывает, как изменяется давление при изменении координат внутри покоящейся жидкости для общего случая относительного покоя.

### Частные случаи интегрирования уравнений Эйлера



#### Покой жидкости под действием силы тяжести

Сначала рассмотрим простейший случай покоя. Жидкость находится под действием силы тяжести. Это означает, что проекции ускорений на оси  $X$  и  $Y$  отсутствуют. Единственным ускорением является ускорение свободного падения  $g$ , т. е.:

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g.$$

Тогда полный дифференциал давления после подстановки в него ускорений примет вид:

$$dP = -\rho g dz.$$

После интегрирования этого выражения получим:

$$\int dP = \int -\rho g dz \Rightarrow P = -\rho g z + C.$$

Постоянную интегрирования, равную

$$C = P + \rho g z,$$

найдем, подставив параметры свободной поверхности  $P_0$  и  $Z_0$ .

После подстановки этих значений в интеграл  $P$  будем иметь равенство:

$$P = -\rho g z + P_0 + \rho g z_0$$

Переписав это выражение в другом виде, получим

$$P = P_0 + \rho g z_0 - \rho g z = P_0 + \rho g \underbrace{(z_0 - z)}_h$$

Если обозначить  $(Z_0 - Z)$  через  $h$ , то приведённое равенство примет уже знакомый вид основного уравнения гидростатики

$$P = P_0 + \rho g h$$

Из этого же равенства можно получить следующий вид

$$P + \rho g z = P_0 + \rho g z_0,$$

или

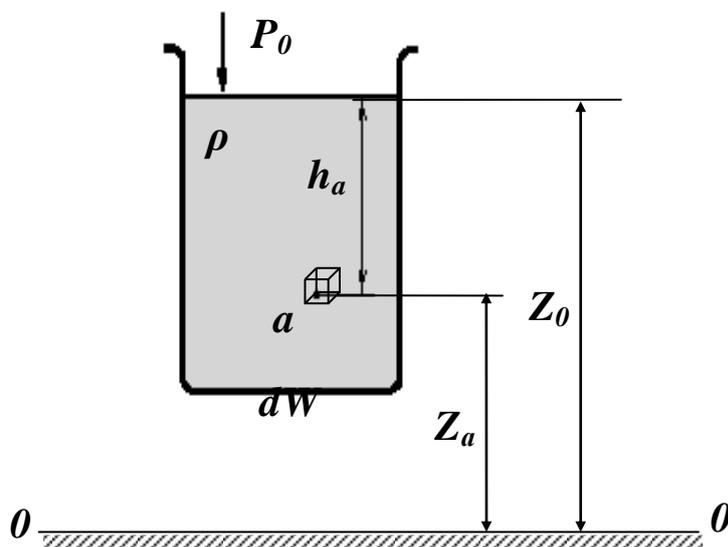
$$z + \frac{P}{\rho g} = \text{const.}$$

Последнее выражение часто называют *основным законом гидростатики*.

### Физический смысл основного закона гидростатики

Полученный выше основной закон гидростатики несложно вывести, опираясь на следующие рассуждения. Они не носят строго математического характера, но правильно отражают физику явления.

Рассмотрим произвольную точку  $a$  внутри покоящегося объёма жидкости, которая расположена на какой-то высоте относительно некоторого произвольного уровня. Этот уровень назовём нулевым уровнем (нулевой линией). Будем считать, что на этой линии потенциальная энергия, зависящая от положения рассматриваемого объёма жидкости, равна  $0$ . С точки зрения практики можно считать, что это уровень, ниже которого рассматриваемый объём жидкости не может пролиться. Например, для лабораторного стакана это уровень стола, для гидросистемы станка – уровень пола,



для системы отопления – уровень земли или подвала.

Вблизи т.  $a$  выберем элементарный объём  $dW$ . Выразим потенциальную энергию этого объёма, как сумму двух составляющих: энергии, зависящей от положения над нулевой линией  $m_a g z_a$ , и энергии сжатия  $dW P_a$ , зависящей

от степени внутреннего напряжения в выбранном объёме.

$$E_a = m_a g z_a + dWP_a;$$

где  $P_a = P_0 + h_a \rho g$  - давление в т.  $a$ ,

$m_a = dW \rho$  - масса объёма  $dW$ , выбранного вокруг т.  $a$ .

$$E_a = dW \rho g z_a + dWP_a.$$

Тогда потенциальная энергия будет выражена

$$E_a = dW \rho g z_a + W (P_0 + h_a \rho g).$$

Если учесть, что  $h_a = z_0 - z_a$ , и подставить его в последнее выражение, получится

$$E_a = dW \rho g z_a + dWP_0 + dW \rho g (z_0 - z_a).$$

Раскрыв скобки, получим

$$E_a = dW \rho g z_a + dWP_0 + dW \rho g z_0 - dW \rho g z_a.$$

После сокращения будем иметь

$$E_a = dWP_0 + dW \rho g z_0.$$

С другой стороны исходное выражение для потенциальной энергии рассматриваемого объёма имеет вид  $E_a = dW \rho g z_a + dWP_a$ . Тогда можно записать

$$dW \rho g z_a + dWP_a = dWP_0 + dW \rho g z_0.$$

Разделим обе части этого выражения на вес рассматриваемого объёма  $dW \rho g$ . В результате получится уже известное выражение основного закона гидростатики

$$z_a + \frac{P_a}{\rho g} = z_0 + \frac{P_0}{\rho g}.$$

Если вспомнить, что т.  $a$  была выбрана произвольно, можно записать полученное равенство в общем виде

$$z + \frac{P}{\rho g} = \text{const.}$$

Из вывода ясно, что физический смысл основного закона гидростатики – закон сохранения энергии для покоящейся жидкости, который говорит о том, что механическая энергия любой частицы жидкости одинакова.

В этом выражении:

$z$  - потенциальная энергия единицы веса жидкости, определяемая положением над нулевой линией,

$\frac{P}{\rho g}$  - потенциальная энергия единицы веса жидкости, зависящая от

степени её сжатия.

В геометрической интерпретации константу обозначают буквой  $H$  и называют *гидростатическим напором*, а саму формулу записывают в виде:

$$z + \frac{P}{\rho g} = H.$$

Слагаемые основного закона гидростатики в этом случае называют:

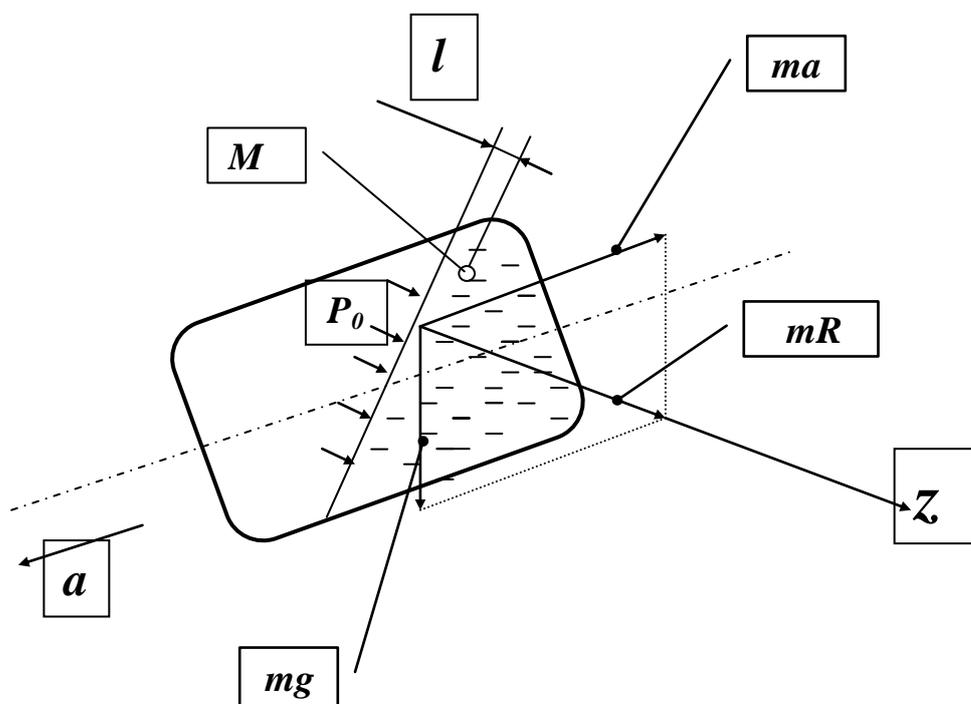
$z$  - нивелирная высота,

$\frac{P}{\rho g}$  - пьезометрическая высота.

### Прямолинейное равноускоренное движение сосуда с жидкостью

Если сосуд с жидкостью неравномерно движется, то на жидкость действуют силы веса и инерционные силы. Под их действием частицы жидкости принимают новое положение. Если движение равноускоренное, то новое положение оказывается равновесным, и жидкость находится в относительном покое. Свободная поверхность и поверхности уровня не горизонтальные. Форма этих поверхностей определяется величиной и направлением равнодействующей массовых сил. При этом равнодействующая всегда перпендикулярна поверхности (первое свойство гидростатического давления). Поверхности уровня не могут пересекаться, т.к. в этом случае в одной точке действовало бы два разных давления.

Рассмотрим сосуд с жидкостью, движущийся с постоянным ускорением  $a$ .



Жидкость в этом сосуде займёт новое равновесное положение. Равновесие объёма жидкости описывается полным дифференциалом давления:

$$dP = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz).$$

Определим давление в произвольной точке жидкости. Для этого возьмём произвольную точку  $M$  на расстоянии  $l$  от свободной поверхности. Кроме этого выберем систему координат, такую, что ось  $Z$  направлена по перпендикуляру к свободной поверхности. Такое расположение оси не изменит существа вывода, но математические выражения будут проще и более узнаваемы. Тогда при прямолинейном движении в выбранной системе координат:

$$a_x = a_y = 0,$$

$$a_z = R.$$

Подставив эти значения в выражение для полного дифференциала, получим

$$dP = \rho(Rdl).$$

После интегрирования будем иметь

$$P = \rho Rl + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдём из граничных условий на свободной поверхности, когда при  $l = 0$ ,  $P = P_0$ . Постоянная  $C$  примет вид  $C = P_0 + \rho Rl_{=0} = P_0$ . После подстановки получим в окончательном виде

$$P = P_0 + \rho Rl.$$

Итоговая формула аналогична основному уравнению гидростатики, с той лишь разницей, что вместо глубины  $h$  используется расстояние от наклонной свободной поверхности  $l$ , а вместо ускорения свободного падения  $g$  - равнодействующее ускорение  $R$ .

### Покой при равномерном вращении сосуда с жидкостью

Рассмотрим сосуд с жидкостью, вращающийся вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью  $\omega$ . На жидкость действуют внешнее давление, силы тяжести и инерционные силы. В результате их действия жидкость принимает новое равновесное положение. Свободная поверхность принимает форму параболоида. Рассмотрим на этой поверхности произвольную точку  $N$ . Равнодействующая сила  $R$ , действующая в т.  $N$ , перпендикулярна к свободной поверхности. Величина этой силы увеличивается с увеличением радиуса, а угол её наклона к горизонту уменьшается. Из этого следует, что наклон этой поверхности к горизонту увеличивается с ростом радиуса. Таким образом, сила  $R$  определяет форму свободной поверхности. Найдём математическую формулу этой кривой.

Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

Выразим отсюда  $dz$ :

$$\int dz = \int \frac{\omega^2 r}{g} dr$$

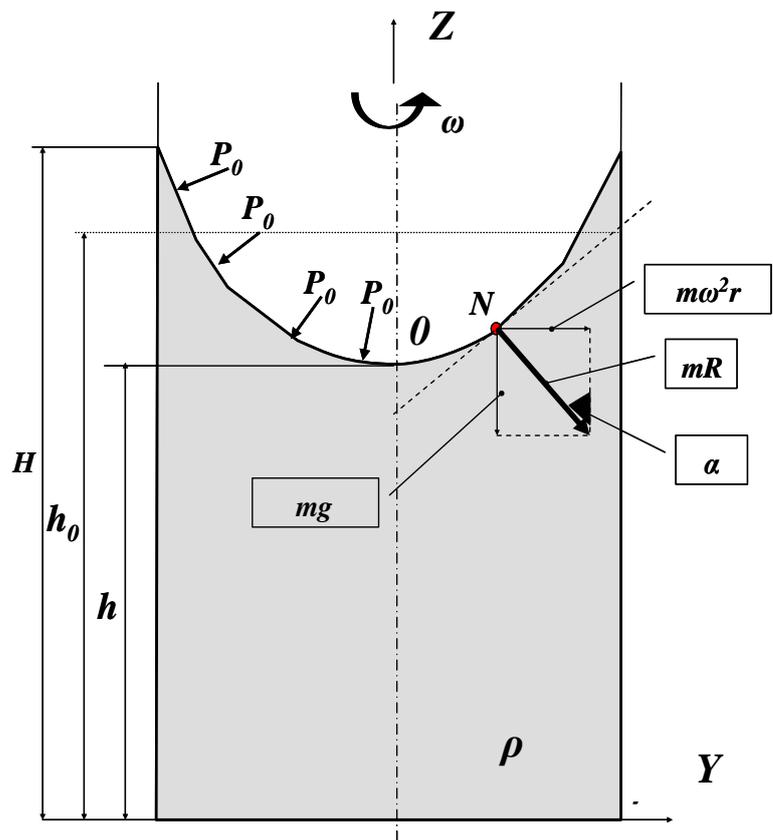
Проинтегрировав, будем иметь:

$$\int dz = \int \frac{\omega^2 r}{g} dr \Rightarrow$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C.$$

Постоянную интегрирования найдём из известных условий: при  $r = 0$

$z = h$ . Подставив эти значения в последнее равенство, получим, что  $C = h$ . В итоге будем иметь формулу, описывающую форму кривой, образующей свободную поверхность:



$$z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Теперь определим давление в жидкости, используя полный дифференциал давления

$$dP = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz).$$

Для данного случая относительного покоя

$$a_x = \omega^2 x,$$

$$a_y = \omega^2 y,$$

$$a_z = -g.$$

С учётом этого полный дифференциал давления примет вид

$$dP = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

Проинтегрируем эту функцию

$$\int dP = \int \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) =$$

$$\rho \int \omega^2 x dx + \rho \int \omega^2 y dy - g \int dz.$$

Результатом интегрирования будет являться выражение

$$P = \rho \left( \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C =$$

$$\rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho gz + C.$$

Учитывая, что  $x^2 + y^2 = r^2$ , где  $r$  – радиус вращения, получим

$$P = \rho \frac{\omega^2}{2} (r^2) - \rho gz + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим из условия, что при  $r = 0$

$P = P_0$ , тогда  $z = h$ . Постоянная интегрирования с учётом принятых условий будет

$$C = P_0 + \rho gh + \rho \frac{\omega^2 0^2}{2}.$$

Тогда формула, выражающая давление в жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью, примет вид

$$P = P_0 + \rho gh - \rho gz + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} =$$

$$P_0 + \rho g(h - z) + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Заметим, что в итоговом выражении первое слагаемое, характеризует давление внешней среды. Второе слагаемое описывает давление, созданное столбом жидкости, находящейся ниже точки  $\theta$ , т.е. глубиной под уровнем нулевой точки. Третье слагаемое характеризуется высотой над точкой  $\theta$ , и, следовательно, описывает давление, создаваемое жидкостью, поднимающейся по краям сосуда, причём эта величина зависит от расстояния точки от оси вращения. Таким образом, оказывается, что давление в каждой точке жидкости, вращающейся с постоянной скоростью относительно вертикальной оси, складывается из внешнего давления и давления столба жидкости над этой точкой.

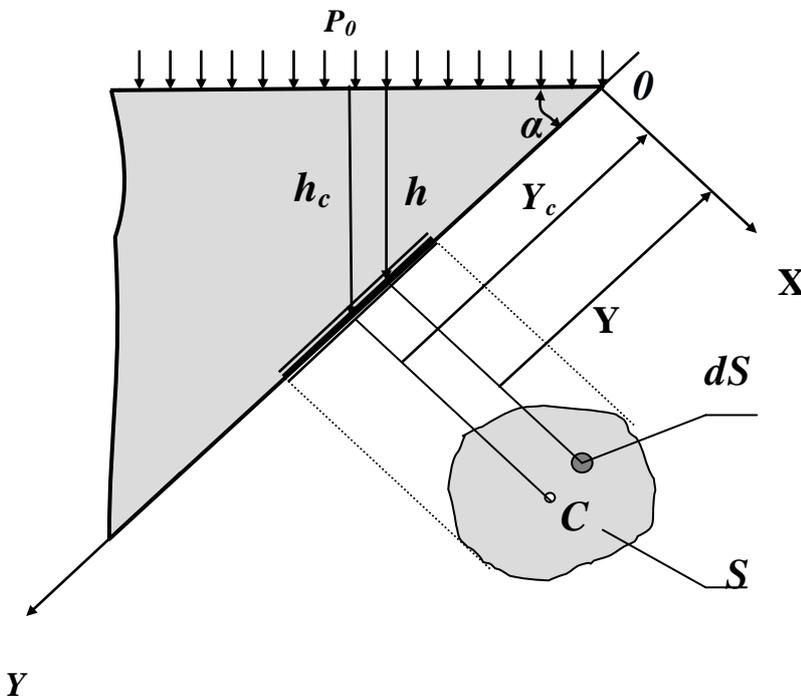
Из приведённого анализа можно сделать следующий вывод. Сосуд с равномерно вращающейся жидкостью можно мысленно представить как совокупность сосудов, имеющих бесконечно малые площади. Давление в любой точке такого сосуда подчиняется основному уравнению гидростатики и подсчитывается привычным образом. Высота столба жидкости в сосудах зависит от частоты вращения и радиуса вращения реального сосуда. Отсюда становится понятно, что вариант равномерного вращения жидкости вокруг произвольно расположенной вертикальной оси (в начале лекции он отмечен цифрой 3) практически не отличается от уже рассмотренного.

## Лекция 6. Давление жидкости на окружающие её стенки

Важнейшей задачей гидростатики является определение сил, с которыми жидкость действует на окружающие её твёрдые стенки. Очень часто необходимо знать величину, направление и точку приложения сил, вызванных давлением, чтобы правильно провести прочностные расчёты элементов конструкции гидропривода (гидравлических машин, аппаратов и арматуры). Подобные задачи необходимо решать и в ходе проектирования гидротехнических сооружений (плотин, дамб, причалов и т.д.). Проанализируем решение наиболее часто возникающих (типовых) задач.

### Сила давления жидкости на плоскую стенку

Рассмотрим произвольную площадку  $ds$ , расположенную на плоской



наклонной стенке сосуда с жидкостью на расстоянии  $Y$  от оси  $X$ , и определим силы, действующие на эту площадку. Сила от давления, действующего на элементарную площадку  $dS$ , будет описываться формулой:

$$dF = PdS = (P_0 + \rho gh)dS.$$

Если проинтегрировать это выражение по площади, можно определить полную силу, действующую на всю площадь целиком

$$F = P_0 \int_s dS + \rho g \int_s h dS.$$

Из рисунка ясно, что в последнем выражении  $h = Y \sin \alpha$ . Подставив значение  $h$  в предыдущее выражение, будем иметь:

$$F = P_0 S + \rho g \sin \alpha \int_S Y dS.$$

Из теоретической механики известно, что интеграл  $\int_S Y dS$  есть ни что иное, как статический момент площади  $S$  относительно оси  $OX$ . Он равен произведению этой площади на координату её центра тяжести, т.е. можно записать

$$\int_S Y dS = Y_c S;$$

где  $Y_c$  – расстояние от оси  $X$  до центра тяжести площади  $S$ . Подставив формулу момента в выражение силы, получим:

$$F = P_0 S + \overbrace{\rho g Y_c \sin \alpha}^{P_{изб}} S.$$

Анализ второго слагаемого показывает, что произведение  $Y_c \sin \alpha$  это глубина положения центра тяжести площадки, а  $\rho g Y_c \sin \alpha$  – избыточное давление жидкости в центре тяжести площадки. С учётом этого можно записать

$$F = \underbrace{(P_0 + \rho g h_c)}_{P_c} S.$$

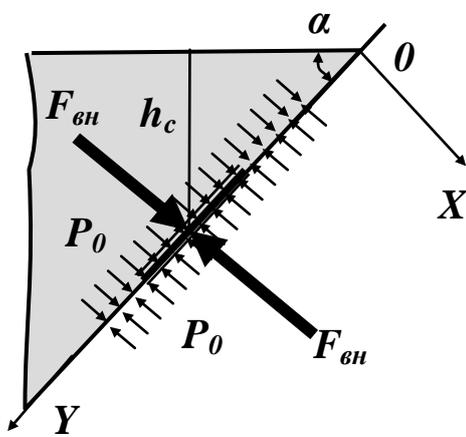
Сумма в скобках в последнем выражении является абсолютным давлением в центре тяжести рассматриваемой произвольной площадки. Таким образом, можно сделать вывод: полная сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению её площади на величину гидростатического давления в центре тяжести этой стенки.

Однако необходимо учесть, что эта сила не сконцентрирована в точке, а распределена по площади. И распределение это неравномерно. По этой причине для расчётов, кроме величины силы действующей на наклонную площадку, необходимо знать точку приложения равнодействующей.

## Центр давления

Распределённую нагрузку, действующую на наклонную стенку, заменим сконцентрированной. Для этого найдём на наклонной стенке положение точки  $D$ , в которой приложена равнодействующая силы давления. Точку, в которой приложена эта сила, называют **центром давления**. Как уже неоднократно рассматривалось, давление, действующее в любой точке, в соответствии с основным уравнением гидростатики складывается из двух частей: внешнего давления  $P_0$ , передающегося всем точкам жидкости одинаково, и давления столба жидкости  $P$ , определяемого глубиной погружения этой точки.

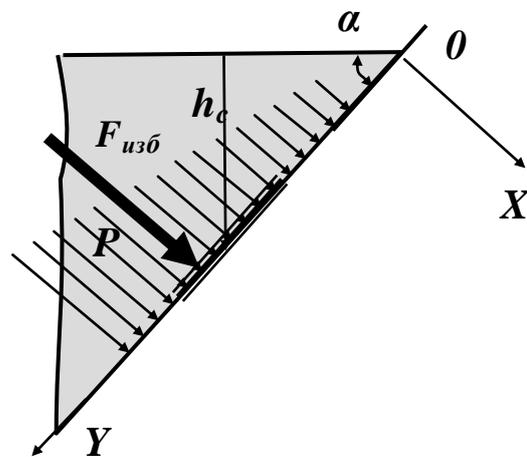
Давление  $P_0$  передаётся всем точкам площадки одинаково. Следовательно, равнодействующая  $F_{вн}$  этого давления будет приложена в центре тяжести площадки  $S$ . При этом надо учитывать, что в большинстве случаев это давление действует и со стороны жидкости и с наружной стороны стенки.



Давление  $P$  увеличивается с увеличением глубины. При этом величина равнодействующей этой силы  $F_{изб}$  известна и равна

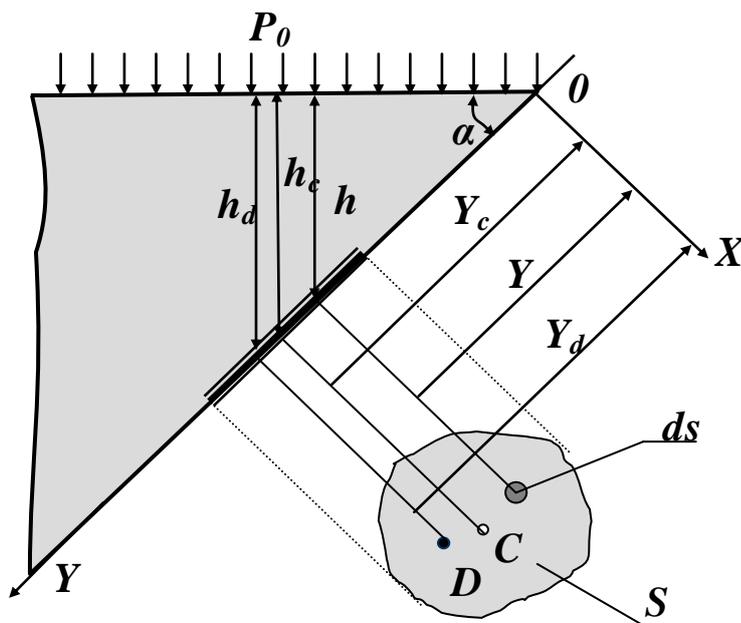
$$F_{изб} = \rho g h_c S,$$

а точку её приложения необходимо определить.



Для нахождения центра избыточного давления жидкости применим

уравнение механики, согласно которому момент равнодействующей силы относительно оси  $OX$  равен сумме моментов составляющих сил, т.е.



$$F_{изб} Y_D = \int_S Y dF_{изб};$$

где  $Y_D$  - координата точки приложения силы  $F_{изб}$ ,

$Y$  - текущая глубина.

Учтём, что, если  $h_c$  выразить как координату точки  $C$  по оси  $Y$ , то  $F_{изб}$

примет вид:

$$F_{u3\bar{b}} = (\rho g \sin \alpha Y_c S) Y_D = \int_S Y d(\rho g \sin \alpha Y S) = \rho g \sin \alpha \int_S Y^2 dS.$$

Заменив в этом выражении  $F_{u3\bar{b}}$  и  $Y_D$  интегралом, в соответствии с упомянутым уравнением механики, будем иметь:

$$F_{u3\bar{b}} Y_D = \int_S Y dF_{u3\bar{b}} = \int_S Y d(\rho g \sin \alpha Y S) = \rho g \sin \alpha \int_S Y^2 dS.$$

Отсюда выразим  $Y_D$ :

$$Y_D = \frac{\rho g \sin \alpha \int_S Y^2 dS}{\rho g \sin \alpha Y_c S} = \frac{\int_S Y^2 dS}{Y_c S}.$$

Интеграл в числителе дроби является статическим моментом инерции площади  $S$  относительно оси  $OX$  и обычно обозначается  $J_x$

$$\int_S Y^2 dS = J_x.$$

Из теоретической механики известно, что статический момент площади относительно оси вращения равен сумме собственного момента инерции (момента инерции этой площади относительно оси проходящей через её центр тяжести и параллельной первой оси) и произведению этой площади на квадрат расстояния от оси вращения до центра её тяжести

$$J_x = J_{x_0} + Y_c^2 S.$$

С учётом последнего определения  $Y_D$  окончательно можно выразить в виде:

$$Y_D = \frac{J_{x_0} + Y_c^2 S}{Y_c S} = Y_c + \frac{J_{x_0}}{Y_c S}.$$

Таким образом, разница в положениях  $\Delta Y$  (глубинах) центра тяжести площадки (т.  $C$ ) и центра давления (т.  $D$ ) составляет

$$\Delta Y = \frac{J_{x_0}}{Y_c S}.$$

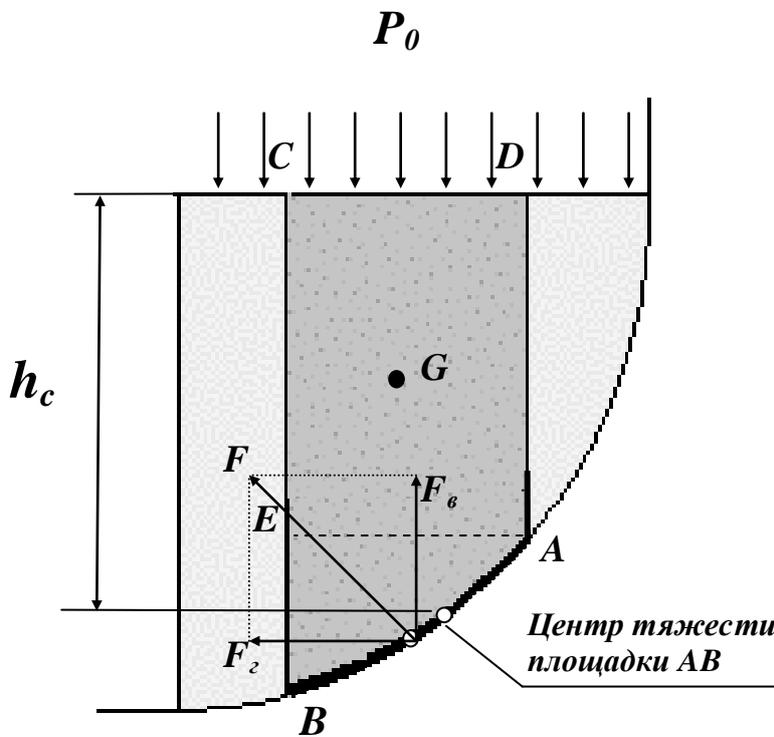
В итоге можно сделать следующие выводы. Если внешнее давление действует на стенку с обеих сторон, то найденная точка  $D$  будет являться центром давления. Если внешнее давление со стороны жидкости выше давления с противоположной стороны (например, атмосферного), то центр давления находится по правилам механики как точка приложения равнодействующей двух сил: силы, создаваемой внешним давлением, и силы, создаваемой весом жидкости. При этом, чем больше внешнее давление, тем ближе располагается центр давления к центру тяжести.

В гидроприводе технологического оборудования внешние давления в десятки и сотни раз превышают давления, вызванные высотой столба жидко-

сти. Поэтому в расчётах гидравлических машин и аппаратов положение центров давления принимаются совпадающими с центрами тяжести.

### Сила давления жидкости на криволинейную стенку

Чаще всего необходимо определить силу, действующую на цилиндрическую поверхность, имеющую вертикальную ось симметрии.



Возможны два варианта. Первый вариант - жидкость воздействует на стенку изнутри.

Во втором варианте жидкость действует на стенку снаружи. Рассмотрим оба этих варианта.

В первом случае выделим объём жидкости, ограниченный рассматриваемым участком цилиндрической поверхности  $AB$ ,

участком свободной поверхности  $CD$ , расположенным над участком  $AB$ , и двумя вертикальными поверхностями  $BC$  и  $CD$ , проходящими через точки  $A$  и  $B$ . Эти поверхности ограничивают объём  $ABCD$ , который находится в равновесии. Рассмотрим условия равновесия этого объёма в вертикальном и горизонтальном направлениях. Заметим, что, если жидкость действует на поверхность  $AB$ , с какой то силой  $F$ , то с такой же силой, но в обратном направлении, и поверхность действует на рассматриваемый объём жидкости. Эту силу, перпендикулярную поверхности  $AB$ , можно представить в виде горизонтальной  $F_2$  и вертикальной  $F_g$  составляющих.

Условие равновесия объёма  $ABCD$  в вертикальном направлении выглядит, так:

$$F_g = P_0 S_2 + G;$$

где  $P_0$  – внешнее давление,

$S_2$  – площадь горизонтальной проекции поверхности  $AB$ ,

$G$  – вес выделенного объёма жидкости.

Условие равновесия этого объёма в горизонтальной плоскости запишем с учётом того, что силы, действующие на одинаковые вертикальные поверхности  $AD$  и  $CE$ , взаимно уравновешиваются. Остаётся только сила давления

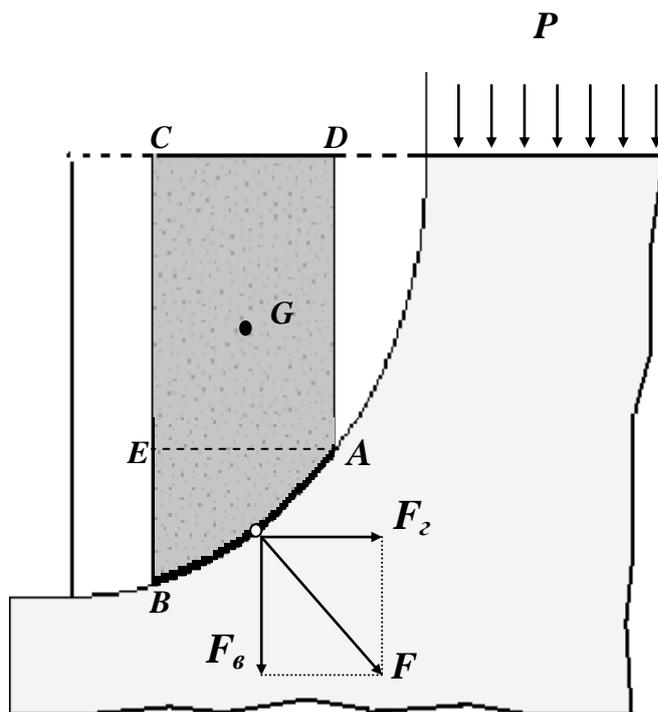
на площадь  $BE$ , которая пропорциональна вертикальной проекции  $S_e$  поверхности  $AB$ . С учётом частичного уравнивания будем иметь условие равновесия сил в горизонтальном направлении в виде:

$$F_2 = S_e \rho g h_c + P_0 S_e;$$

где  $h_c$  - глубина расположения центра тяжести поверхности  $AB$ .

Зная  $F_2$  и  $F_e$  определим полную силу  $F$ , действующую на цилиндрическую поверхность

$$F = \sqrt{F_2^2 + F_e^2}.$$



Во втором случае, когда жидкость воздействует на цилиндрическую поверхность снаружи, величина гидростатического давления во всех точках поверхности  $AB$  имеет те же значения, что и в первом случае, т.к. определяется такой же глубиной. Силы, действующие на поверхность в горизонтальном и вертикальном направлениях, определяются по тем же формулам, но имеют противоположное направление. При этом под величиной  $G$  надо понимать тот же объём жидкости  $ABCD$ , несмотря

на то, что на самом деле он, в данном случае и не заполнен жидкостью.

Положение центра давления на цилиндрической стенке легко можно найти, если известны силы  $F_2$  и  $F_e$  и определены центр давления на вертикальной проекции стенки и центр тяжести рассматриваемого объёма  $ABCD$ . Задача упрощается, если рассматриваемая поверхность является круговой, т.к. равнодействующая сила при этом пересекает ось поверхности. Это происходит из-за того, что силы давления всегда перпендикулярны поверхности, а перпендикуляр к окружности всегда проходит через её центр.

## Круглая труба под действием гидростатического давления

В гидравлических системах технологического назначения жидкость в основном передаётся по трубам круглого сечения. В водопроводах, канализационных и многих других трубопроводных системах, гидротехнических сооружениях широко используются трубы и различные резервуары круглого сечения. По этой причине задача определения нагрузки на трубу является весьма распространённой. В таких расчётах используется полученная ранее формула горизонтальной составляющей силы, действующей со стороны жидкости на криволинейную поверхность

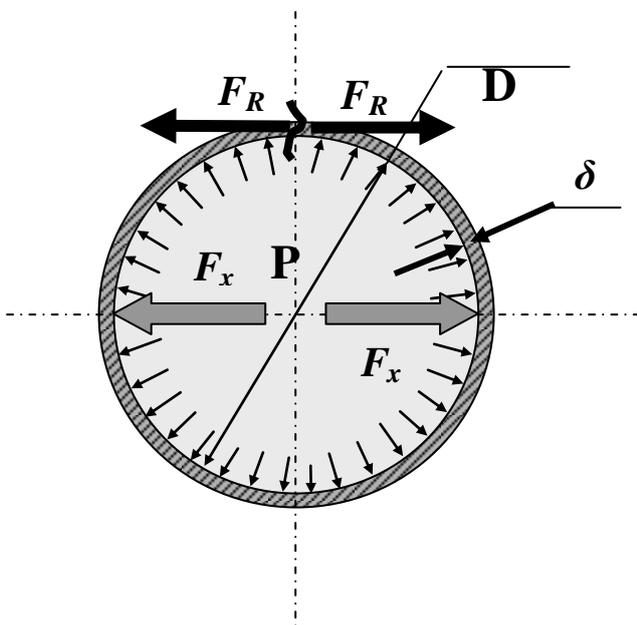
$$F_z = S_\delta \rho g h_c + P_0 S_\delta = S_\delta (\rho g h_c + P_0).$$

Для труб небольшого диаметра, которые применяются в машиностроительном гидроприводе, давлением столба жидкости можно пренебречь ввиду его малости. Тогда уравнение примет вид

$$F_z = S_\delta P_0,$$

где  $P_0$  – внешнее давление.

Рассмотрим трубу длиной  $l$  с внутренним диаметром  $D$  и толщиной



стенки  $\delta$ , находящуюся под действием гидростатического давления  $P$ . Это давление порождает разрывающие силы  $F_x$ . Из-за симметричности трубы такие разрывающие силы будут действовать одинаково во всех направлениях. Для вертикальной плоскости эта сила будет равна

$$F_x = P D l,$$

где произведение  $Dl$  – есть вертикальная проекция площади стенки трубы.

Разрывающей силе будут противодействовать силы реакции  $F_R$ , возникающие в стенках трубы. Площадь стенок трубы  $S_\delta$  в любом осевом сечении составит:

$$S_\delta = 2l\delta.$$

Под действием разрывающих сил в стенках трубы будет возникать суммарная сила реакция  $F_R$ , равная по величине разрывающей силе, но направленная в противоположную сторону:

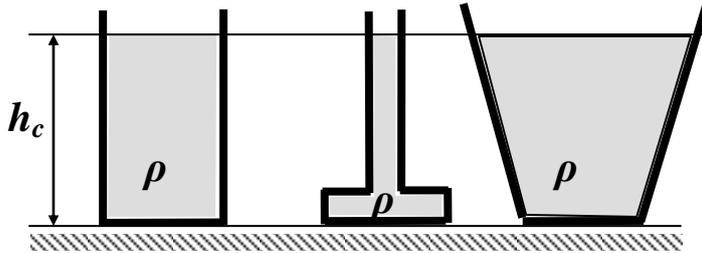
$$F_R = F_x.$$

Отсюда находится напряжение  $\sigma$  в стенках трубы, вызываемое давлением внутри трубы. Оно равняется

$$\sigma = \frac{F_R}{S_\delta} = \frac{P D l}{2 l \sigma} = \frac{P D}{2 \sigma}.$$

## Гидростатический парадокс

Рассмотрим три сосуда разной формы, заполненные жидкостью до одного уровня  $h_c$ . Все сосуды такие, что имеют одинаковую площадь дна.



$$S_1 = S_2 = S_3$$

В соответствии с общей формулой определения силы, действующей на плоскую поверхность

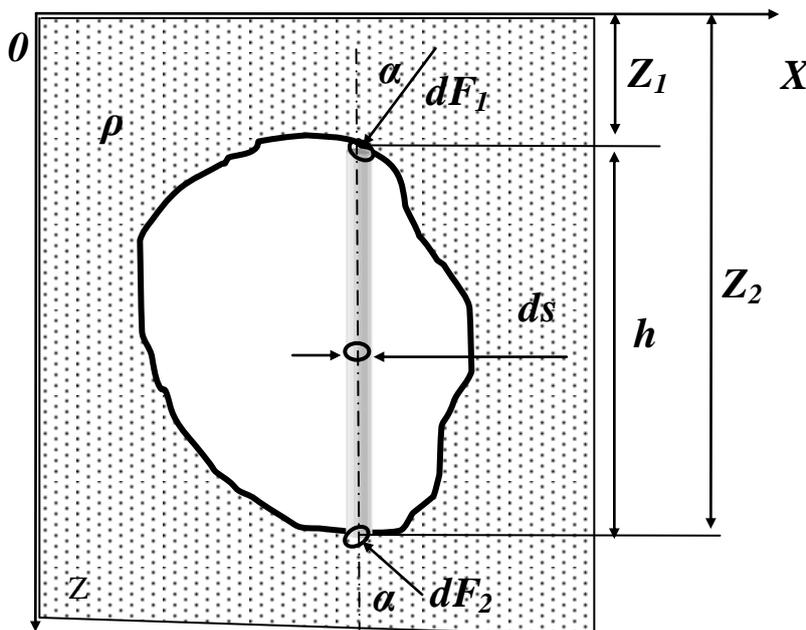
$$F_{изб} = \rho g h_c S,$$

можно вычислить силу, действующую на дно сосуда. Для всех трёх сосу-

дов эти силы окажутся одинаковыми и независимыми от веса жидкости в сосуде. Но на опору все сосуды будут действовать с разными силами, равными весу сосудов с жидкостью. Этот факт получил название *гидростатического парадокса*.

## Основы теории плавания тел

Будем считать, что в жидкость плотностью  $\rho$  погружено тело объёмом  $V$ . Выберем систему координат, ось  $Z$  которой направим вниз, а оси  $X$  и  $Y$  вдоль свободной поверхности. Рассмотрим усилия, действующие на тело со



стороны жидкости. Все горизонтальные составляющие, как было установлено выше, будут уравниваться. Для определения вертикальных составляющих выделим в твёрдом теле элементарный цилиндрический объём с площадью поперечного сечения  $dS$ . На торцевые поверхности этого объёма действуют силы  $dF_1$  сверху и  $dF_2$  снизу.

Вертикальная составляющая силы  $dF_1$  будет:

$$\begin{aligned}dF_1 \cos \alpha_1 &= \\ \rho g dS_1 \cos \alpha_1 &= \\ &= \rho g z_1 dS.\end{aligned}$$

Вертикальная составляющая силы  $dF_2$  будет:

$$\begin{aligned}dF_2 \cos \alpha_2 &= \\ &= -\rho g dS_2 \cos \alpha_2 = \\ &= \rho g z_2 dS.\end{aligned}$$

Будем считать, что погруженное в жидкость тело находится в равновесии. Поэтому вес выделенного элементарного цилиндра  $dG$  будет уравновешиваться действующими на него силами.

$$dG = \rho g z_1 dS - \rho g z_2 dS = -\rho g h dS.$$

Проинтегрировав это выражение по площади горизонтальной проекции тела, получим:

$$G = -\rho g \int_s h dS = -\rho g V.$$

Это выражение называется **законом Архимеда**: погруженное в жидкость тело теряет в своём весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость. Другими словами на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости. Эта сила приложена в точке, которая называется точкой водоизмещения.

В зависимости от отношения веса и выталкивающей силы возможны три состояния тела:

- если вес больше выталкивающей силы – тело тонет,
- если вес меньше выталкивающей силы – тело всплывает,
- если вес равен выталкивающей силе – тело плавает.

## Лекция 7. Кинематика жидкости

Основной задачей этого раздела гидравлики является определение следующих зависимостей скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $P$  в каждой точке потока жидкости, которые являются соответствующими функциями времени  $t$  и координат  $x, y, z$ :

$$u = f_u(x, y, z, t)$$

и

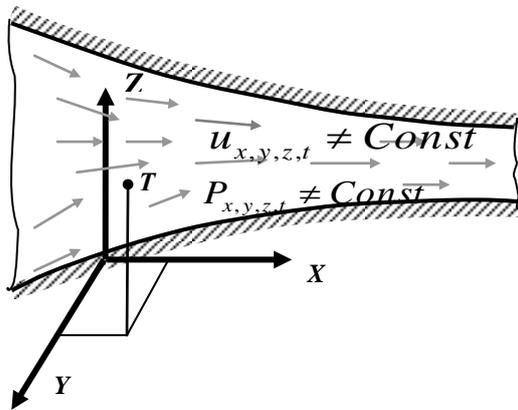
$$P = f_p(x, y, z, t).$$

Изучение этих зависимостей начнём с рассмотрения *идеальной жидкости*, под которой будем понимать воображаемую жидкость, не имеющую вязкости и, следовательно, не имеющую внутренних сил. Давление в такой жидкости имеет свойства статического давления, т.е. направлено по внутренней нормали и передаётся одинаково во всех направлениях.

### Виды движения (течения) жидкости

Течение жидкости вообще может быть неустановившимся (нестационарным) или установившимся (стационарным).

**Неустановившееся движение** – такое, при котором в любой точке потока скорость движения и давление с течением времени изменяются, т.е.  $\mathbf{u}$

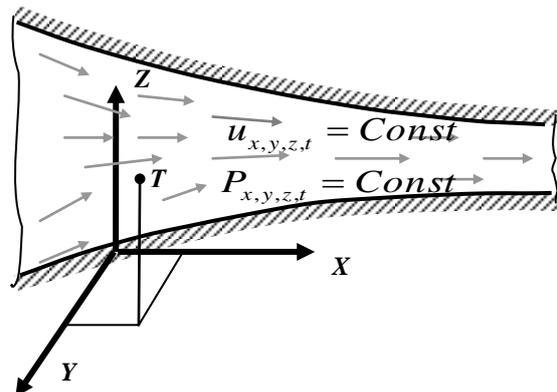


и  $P$  зависят не только от координат точки в потоке, но и от момента времени, в который определяются характеристики движения т.е.:

$$u = f_u(x, y, z, t) \text{ и } P = f_p(x, y, z, t).$$

Примером неустановившегося движения жидкости из опорожняющегося сосуда, при котором уровень жидкости в сосуде постепенно меняется (уменьшается) по мере вытекания жидкости.

**Установившееся движение** – такое, при котором в любой точке потока скорость движения и давление с течением времени не изменяются, т.е.  $\mathbf{u}$  и  $P$  зависят только от координат точки в потоке, но не зависят от момента времени, в который определяются характеристики движения:



$$u = f'_u(x, y, z) \text{ и } P = f'_P(x, y, z),$$

и, следовательно,  $\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$ .

Пример установившегося движения - вытекание жидкости из сосуда с постоянным уровнем, который не меняется (остаётся постоянным) по мере вытекания жидкости.

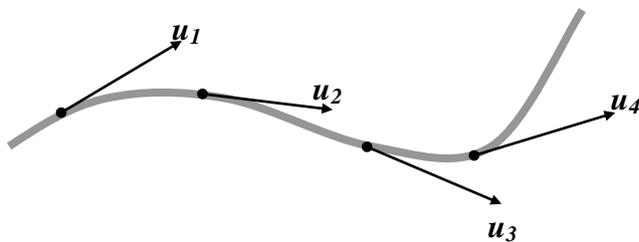
В случае установившегося течения в процессе движения любая частица, попадая в заданное, относительно твёрдых стенок, место потока, всегда имеет одинаковые параметры движения. Следовательно, каждая частица движется по определённой траектории.

**Траекторией** называется путь, проходимый данной частицей жидкости в пространстве за определенный промежуток времени.

При установившемся движении форма траекторий не изменяется во время движения. В случае неустановившегося движения величины направления и скорости движения любой частицы жидкости непрерывно изменяются, следовательно, и траектории движения частиц в этом случае также постоянно изменяются во времени.

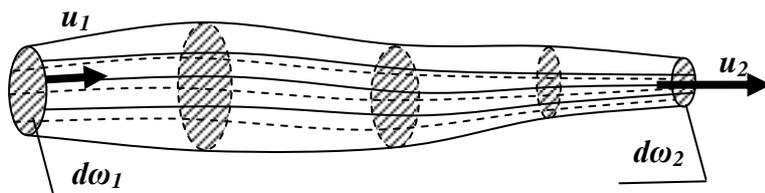
Поэтому для рассмотрения картины движения, образующейся в каждый момент времени, применяется понятие линии тока.

**Линия тока** - это кривая, проведенная в движущейся жидкости в данный момент времени так, что в каждой точке векторы скорости  $u_i$  совпадают с касательными к этой кривой.



Нужно различать траекторию и линию тока. Траектория характеризует путь, проходимый одной определенной частицей, а линия тока направление движения в данный момент времени каждой частицы жидкости, лежащей на ней.

При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости. При неустановившемся движении они не совпадают, и каждая частица жидкости лишь один момент времени находится на линии тока, которая сама существует лишь в это мгновение. В следующий момент возникают другие линии тока, на которых будут располагаться другие частицы. Еще через мгновение картина опять меняется.



Если выделить в движущейся жидкости элементарный замкнутый контур площадью  $d\omega$  и через все точки этого контура провести линии тока, то получится трубчатая поверхность, которую называют **трубкой тока**. Часть потока, ограниченная

поверхностью трубки тока, называется *элементарной струйкой жидкости*. Таким образом, элементарная струйка жидкости заполняет трубку тока и ограничена линиями тока, проходящими через точки выделенного контура с площадью  $d\omega$ . Если  $d\omega$  устремить к  $0$ , то элементарная струйка превратится в линию тока.

Из приведённых выше определений вытекает, что в любом месте поверхности каждой элементарной струйки (трубки тока) в любой момент времени вектора скоростей направлены по касательной (и, следовательно, нормальные составляющие отсутствуют). Это означает, что ни одна частица жидкости не может проникнуть внутрь струйки или выйти наружу.

При установившемся движении элементарные струйки жидкости обладают рядом свойств:

- площадь поперечного сечения струйки и ее форма с течением времени не изменяются, так как не изменяются линии тока;
- проникновение частиц жидкости через боковую поверхность элементарной струйки не происходит;
- во всех точках поперечного сечения элементарной струйки скорости движения одинаковы вследствие малой площади поперечного сечения;
- форма, площадь поперечного сечения элементарной струйки и скорости в различных поперечных сечениях струйки могут изменяться.

Трубка тока является как бы непроницаемой для частиц жидкости, а элементарная струйка представляет собой элементарный поток жидкости.

При неустановившемся движении форма и местоположение элементарных струек непрерывно изменяются.

Кроме того, установившееся движение подразделяется на *равномерное* и *неравномерное*.

Равномерное движение характеризуется тем, что скорости, форма и площадь сечения потока не изменяются по длине потока.

Неравномерное движение отличается изменением скоростей, глубин, площадей сечений потока по длине потока.

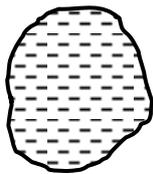
Среди неравномерно движущихся потоков следует отметить плавно изменяющиеся движения, характеризующиеся тем, что:

- линии тока искривляются мало;
- линии тока почти параллельны, и живое сечение можно считать плоским;
- давления в живом сечении потока зависят от глубины.

## Типы потоков жидкости

Совокупность элементарных струек жидкости представляет собой *поток* жидкости. Различают следующие типы потоков (или типы движений жидкости).

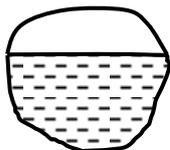
**Напорные потоки (напорные движения)** - это такие, когда поток ограничен твердыми стенками со всех сторон, при этом в любой



точке потока давление отличается от атмосферного обычно в большую сторону, но может быть и меньше атмосферного. Движение в этом случае происходит за счёт напора, создаваемого, например, насосом или водонапорной башней. Давление

вдоль напорного потока обычно переменное. Такое движение имеет место во всех гидроприводах технологического оборудования, водопроводах, отопительных системах и т.п.

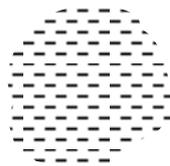
**Безнапорные потоки (безнапорные движения)** отличаются тем, что



поток имеет свободную поверхность, находящуюся под атмосферным давлением. Безнапорное движение происходит под действием сил тяжести самого потока жидкости. Давление в таких потоках примерно одинаково и отличается от атмосферного только за счет глубины потока. Примером такого движения

может быть течение воды в реке, канале, ручье.

**Свободная струя** не имеет твёрдых стенок. Движение происходит под



действием сил инерции и веса жидкости. Давление в таком потоке практически равно атмосферному. Пример свободной струи – вытекание жидкости из шланга, крана и т.п.

## Гидравлические характеристики потока жидкости

В гидравлике различают следующие характеристики потока: **живое сечение, смоченный периметр, гидравлический радиус, расход, средняя скорость.**

**Живым сечением** потока называется поверхность (поперечное сечение), нормальная ко всем линиям тока, его пересекающим, и лежащая внутри потока жидкости. Площадь живого сечения обозначается буквой  $\omega$ . Для элементарной струйки жидкости используют понятие **живого сечения элементарной струйки** (сечение струйки, перпендикулярное линиям тока), площадь которого обозначают через  $d\omega$ .

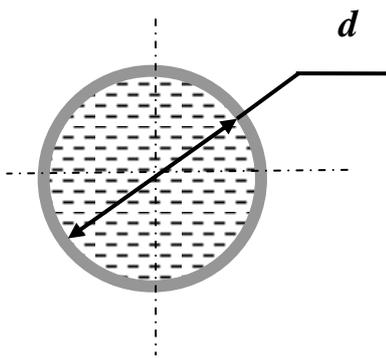
**Смоченный периметр** потока – линия, по которой жидкость соприкасается с поверхностями русла в данном живом сечении. Длина этой линии обозначается буквой  $\chi$ .

В напорных потоках смоченный периметр совпадает с геометрическим периметром, так как поток жидкости соприкасается со всеми твёрдыми стенками.

**Гидравлическим радиусом  $R$**  потока называется часто используемая в гидравлике величина, представляющая собой отношение площади живого сечения  $\omega$  к смоченному периметру  $\chi$ :

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

При напорном движении в трубе круглого сечения гидравлический радиус будет равен:

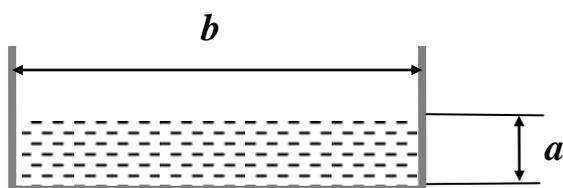


$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4},$$

т.е. четверти диаметра, или половине радиуса трубы.

Для безнапорного потока прямоугольного сечения с размерами  $a \times b$  гидравлический радиус можно вычислить по формуле

числить по формуле



$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{ab}{2a + b}.$$

Свободная поверхность жидкости при определении смоченного периметра не учитывается.

**Расход потока жидкости (расход жидкости)** – количество жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение потока.

Различают объёмный, массовый и весовой расходы жидкости.

Объёмный расход жидкости это объём жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение потока. Объёмный расход жидкости измеряется обычно в  $\text{м}^3/\text{с}$ ,  $\text{дм}^3/\text{с}$  или  $\text{л}/\text{с}$ . Он вычисляется по формуле

$$Q = \frac{W}{t},$$

где  $Q$  – объёмный расход жидкости,

$W$  – объём жидкости, протекающий через живое сечение потока,

$t$  – время течения жидкости.

Массовый расход жидкости это масса жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение потока. Массовый расход измеряется обычно в  $\text{кг}/\text{с}$ ,  $\text{г}/\text{с}$  или  $\text{т}/\text{с}$  и определяется по формуле

$$Q_M = \frac{M}{t};$$

где  $Q_M$  – массовый расход жидкости,

$M$  – масса жидкости, протекающий через живое сечение потока,

$t$  – время течения жидкости.

Весовой расход жидкости это вес жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение потока. Весовой расход измеряется обычно в  $\text{Н}/\text{с}$ ,  $\text{кН}/\text{с}$ . Формула для его определения выглядит так:

$$Q_G = \frac{G}{t};$$

где  $Q_G$  – весовой расход жидкости,  
 $G$  – вес жидкости, протекающий через живое сечение потока,  
 $t$  – время течения жидкости.

Чаще всего используется объёмный расход потока жидкости. С учётом того, что поток складывается из элементарных струек, то и расход потока складывается из расходов элементарных струек жидкости  $dQ$ .

**Расход элементарной струйки** – объём жидкости  $dW$ , проходящей через живое сечение струйки в единицу времени. Таким образом:

$$dQ = \frac{dW}{dt},$$

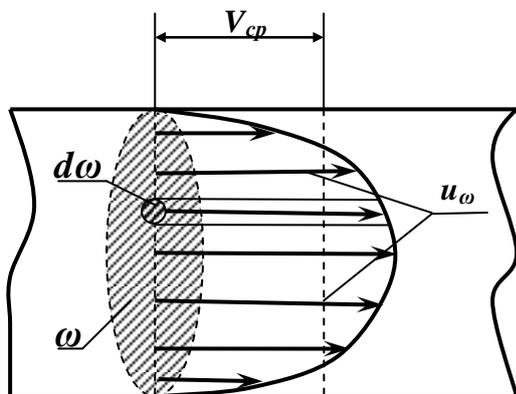
Если последнее выражение проинтегрировать по площади живого сечения потока можно получить формулу объёмного расхода жидкости, как сумму расходов элементарных струек

$$Q = \int_{\omega} dQ.$$

Применение этой формулы в расчетах весьма затруднительно, так как расходы элементарных струек жидкости в различных точках живого сечения потока различны. Поэтому в практике для определения расхода чаще пользуются понятием средней скорости потока.

**Средняя скорость потока жидкости  $V_{cp}$**  в данном сечении это не существующая в действительности скорость потока, одинаковая для всех точек данного живого сечения, с которой должна была бы двигаться жидкость, что бы её расход был равен фактическому.

## Струйная модель потока



В гидравлике рассматривается **струйная модель движения жидкости**, т.е. поток представляется как совокупность элементарных струек жидкости, имеющих различные скорости течения  $u_\omega$ . Индекс  $\omega$  означает (напоминает), что в каждой точке живого сечения скорости различны. Элементарные струйки как бы скользят друг по другу. Они трутся между собой и вследствие этого их скорости различаются. Причём, в середине потока скорости наибольшие, а к периферии они уменьшаются.

Распределение скоростей по живому сечению потока можно представить в виде параболоида с основанием, равным  $\omega$ . Высота его в любой точке равна скорости соответствующей элементарной струйки  $u_\omega$ . Площадь элементарной струйки равна

$d\omega$ . В пределах этой площади скорость можно считать постоянной. Понятно, что за единицу времени через живое сечение потока будет проходить объём жидкости  $W_b$ , равный объёму параболоида. Этот объём жидкости и будет равен расходу потока.

$$W_{t=\text{параболоида}} = Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u_{\omega} d\omega.$$

С учётом понятия средней скорости, которая во всех точках живого сечения одинакова, за единицу времени через живое сечение потока будет проходить объём жидкости (обозначим его  $W_{tcp}$ ), равный:

$$W_{tcp} = \omega V_{cp}.$$

Если приравнять эти объёмы  $W_{tcp} = W_{t=\text{параболоида}}$ , можно определить значение средней скорости потока жидкости:

$$V_{cp} = \frac{\int_{\omega} u_{\omega} d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega}.$$

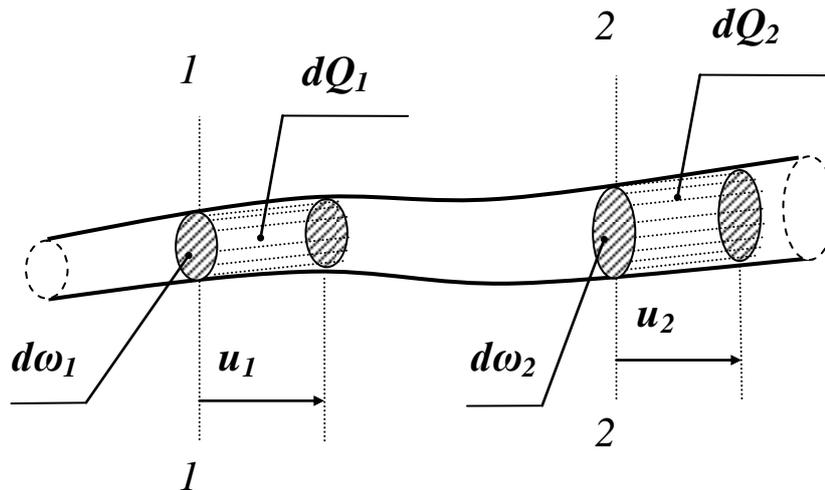
В дальнейшем среднюю скорость потока жидкости будем обозначать буквой  $V$  без индекса  $cp$ .

При неравномерном движении средняя скорость в различных живых сечениях по длине потока различна. При равномерном движении средняя скорость по длине потока постоянна во всех живых сечениях.

## Лекция 8. Уравнения неразрывности

### Уравнение неразрывности для элементарной струйки жидкости

В технологическом оборудовании чаще всего рассматривают потоки, в которых не образуются разрывы жидкости, т.е. жидкость сплошь заполняет пространство.



Рассмотрим элементарную струйку несжимаемой жидкости при установившемся движении, в которой выделим два произвольных сечения **1-1** и **2-2**, расположенные на некотором расстоянии одно от другого. Здесь  $d\omega_1$  и  $d\omega_2$  – площади,  $u_1$  и  $u_2$  – скорости,  $dQ_1$  и  $dQ_2$  – расходы элементарной струйки в соответствующих живых сечениях.

Очевидно, что

$$dQ_1 = d\omega_1 u_1$$

и

$$dQ_2 = d\omega_2 u_2,$$

причём  $dQ_1$  втекает в рассматриваемый участок элементарной струйки, а  $dQ_2$  – вытекает.

Учтём, что форма элементарной струйки не изменяется с течением времени, а поперечный приток и отток невозможны, так как скорости на боковой поверхности струйки направлены по касательным к линиям тока, из которых состоит эта боковая поверхность, тогда получаем, что расходы  $dQ_1$  и  $dQ_2$  равны, т.е.

$$d\omega_1 u_1 = d\omega_2 u_2.$$

Вследствие того, что сечения **1-1** и **2-2** выбраны произвольно, подобные соотношения справедливы для любых сечений элементарной струйки. Следовательно, можно записать:

$$d\omega_i u_i = \text{const}$$

или

$$dQ_i = \text{const}.$$

Последнее соотношение называется *уравнением неразрывности в гидравлической форме для элементарной струйки* несжимаемой жидкости при установившемся движении.

### **Уравнение неразрывности в гидравлической форме для потока жидкости при установившемся движении**

Если просуммировать расходы всех элементарных струек в каждом живом сечении потока, то получится *уравнение неразрывности для потока* при установившемся движении. Обычно его записывают в следующих видах:

$$Q = \text{const},$$

или

$$\omega_i V_i = \text{const},$$

или

$$\int_{\omega} u_i d\omega = \text{const}.$$

Из сказанного видно, что для несжимаемой жидкости при установившемся движении жидкости расход во всех живых сечениях потока одинаков, несмотря на то, что площади живого сечения и средние скорости в каждом сечении и могут быть разными.

Из уравнения неразрывности вытекает следующее важное соотношение:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

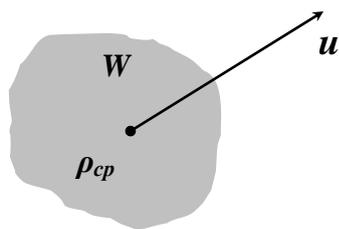
т.е. средние скорости в живых сечениях потока обратно пропорциональны их площадям.

Уравнение неразрывности потока жидкости в гидравлической форме очень часто применяется в гидравлике для описания движения жидкости в каналах и трубопроводах.

### **Дифференциальные уравнения неразрывности движения жидкости**

Уравнения, рассмотренные выше, представлены в интегральной форме и не учитывают всех условий движения потока жидкости.

Рассмотрим то же самое движение жидкости, опираясь на важнейший закон механики - закон сохранения массы.



Рассмотрим движение со скоростью  $u$  некоторого произвольного объёма  $W$  плотностью  $\rho_{cp}$ . Масса этого объёма равна  $M = \rho_{cp}W$ . Условием сплошности (неразрывности) является:

$$\frac{dM}{dt} = 0,$$

т.е. масса объёма  $W$  не меняется во времени. Однако неизменность массы не означает, что составляющие, определяющие массу тоже должны быть постоянны. Причём, в общем случае изменяются во времени как объём  $W$ , так и плотность жидкости  $\rho$ . Тогда можно записать:

$$\frac{dM}{dt} = W \frac{d\rho}{dt} + \frac{dW}{dt} \rho = 0.$$

Первое слагаемое в этом уравнении  $W \frac{d\rho}{dt}$  описывает изменение массы за счёт изменения плотности при постоянном объёме, а второе слагаемое  $\frac{dW}{dt} \rho$  описывает изменение массы за счёт изменения объёма при постоянной плотности.

Учитывая то, что  $W = \frac{M}{\rho}$  и  $\rho = \frac{M}{W}$ , подставим эти значения в последнее уравнение и преобразуем его к виду:

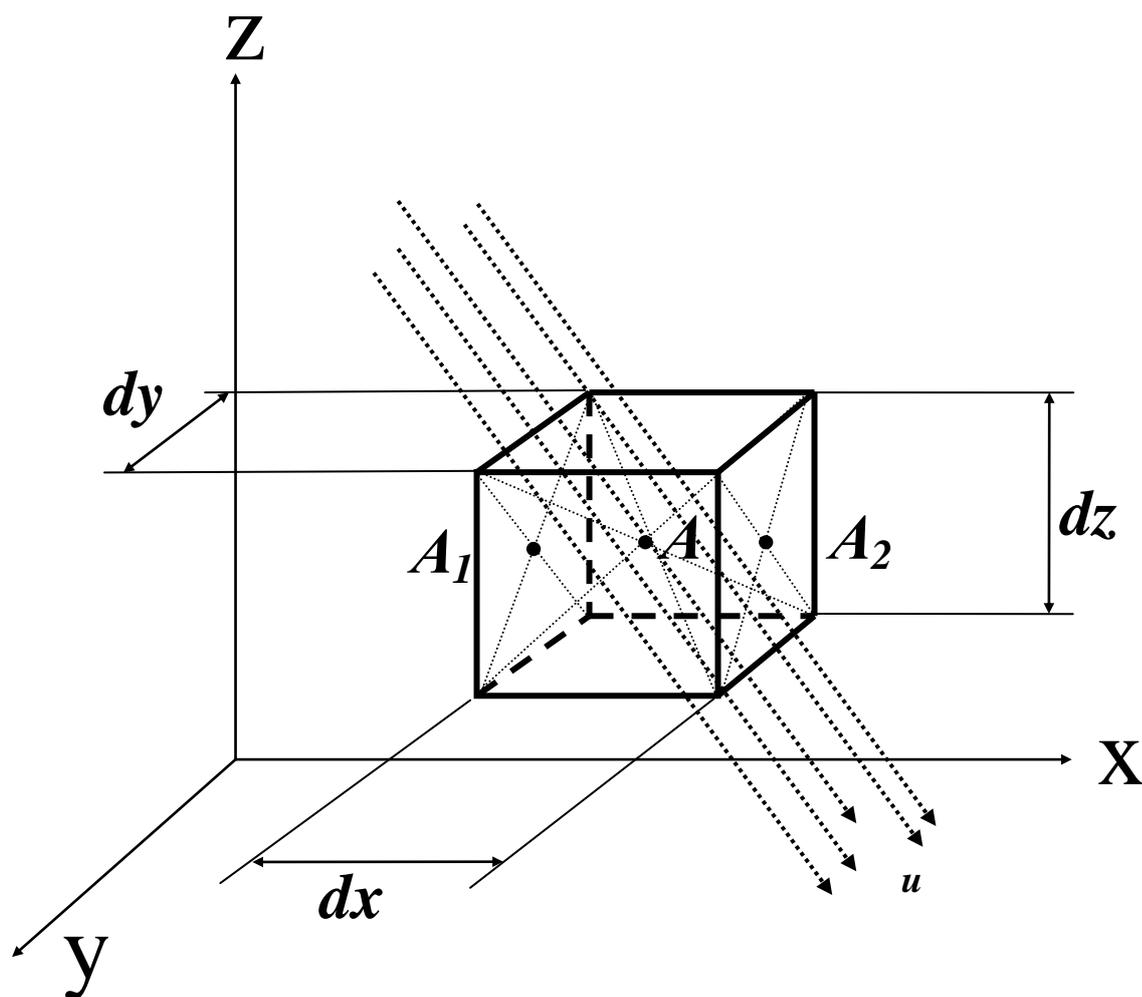
$$\frac{dM}{dt} = \frac{M}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{dW}{dt} \frac{M}{W} = 0.$$

Разделим это уравнение на  $M$ , приведя его тем самым к уравнению для единичной массы:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = 0.$$

Первое слагаемое показывает изменение плотности во времени, т.е. в процессе движения (по мере перемещения) жидкости. Второе слагаемое – изменение объёма в процессе движения.

Рассмотрим подробно второе слагаемое. Для этого возьмём некоторую



произвольную точку  $A$  с координатами  $X, Y, Z$ . Через неё (и вблизи неё) в момент времени  $t$  течёт жидкость со скоростью  $u$ . В проекции на оси координат в точке  $A$  жидкость имеет скорости  $u_x, u_y, u_z$ , соответственно. Выделим вокруг точки  $A$  бесконечно малый объём в форме параллелепипеда с размерами  $dx, dy, dz$ . Будем считать этот объём неподвижным, а жидкость - протекающей через него. Определим величину объёма жидкости, которая поступает в рассматриваемый объём и вытекает из него за время  $dt$ .

В проекции на ось  $X$  в точке  $A$  горизонтальная составляющая скорости равна  $u_x$ . В точке  $A_2$  (расположенной на грани  $dy - dz$ ), находящейся на расстоянии  $\frac{1}{2}dx$  от  $A$ , горизонтальная составляющая будет:

$$u_{x(A_2)} = u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

В точке  $A_1$  (расположенной на другой грани  $dy - dz$ ) горизонтальная составляющая этой скорости будет равна:

$$u_{x(A_1)} = u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

В проекции на ось  $Y$  в точке  $A$  составляющая скорости будет равна  $u_y$ . В точке, расположенной в центре грани  $dx - dz$ , находящейся на расстоянии  $\frac{1}{2} dy$  от  $A$  эта составляющая скорости будет:

$$u_y = u_y + \frac{1}{2} dy \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

В точке, расположенной в центре противоположной грани  $dx - dz$  и находящейся на расстоянии  $\frac{1}{2} dy$  от  $A$ , эта составляющая скорости будет:

$$u_y = u_y - \frac{1}{2} dy \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

Аналогично в проекции на ось  $Z$  в точке  $A$  составляющая скорости будет равна  $u_z$ . В точке, расположенной в центре грани  $dx - dy$  и находящейся на расстоянии  $\frac{1}{2} dz$  от  $A$ , эта составляющая скорости примет вид:

$$u_z = u_z + \frac{1}{2} dz \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

В точке, расположенной в центре противоположной грани  $dx - dy$ , и находящейся на расстоянии  $\frac{1}{2} dz$  от  $A$  составляющая скорости будет:

$$u_z = u_z - \frac{1}{2} dz \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

В последних выражениях частные производные  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  показывают изменение величин  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  соответственно, приходящиеся на единицу длины, измеренную вдоль оси, проходящей через точку  $A$  и параллельно соответствующим координатным осям.

Объёмы жидкости  $W_{\dots(вых)}$ , вытекающей через соответствующие грани  $dy - dz$ ,  $dx - dz$ ,  $dx - dy$ , будут равны произведениям соответствующих проекций скоростей на площади граней:

$$W_{y-z(вых)} = (u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt,$$

$$W_{x-z(бых)} = (u_y + \frac{1}{2} dy \frac{\partial u_y}{\partial y}) dx dz dt,$$

$$W_{x-y(бых)} = (u_z + \frac{1}{2} dz \frac{\partial u_z}{\partial z}) dx dy dt$$

Аналогично объёмы жидкости  $W_{...(вх)}$ , входящей через соответствующие грани  $dy - dz$ ,  $dx - dz$ ,  $dx - dy$  будут равны проекциям соответствующих скоростей на такие же по размерам площади граней:

$$W_{y-z(вх)} = (u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt,$$

$$W_{x-z(вх)} = (u_y - \frac{1}{2} dy \frac{\partial u_y}{\partial y}) dx dz dt,$$

$$W_{x-y(вх)} = (u_z - \frac{1}{2} dz \frac{\partial u_z}{\partial z}) dx dy dt$$

Легко видеть, что изменение объёмов  $dW_{...}$  жидкости, проходящей через противоположащие грани за время  $dt$ , будут соответственно равны:

$$\begin{aligned} dW_{y-z} &= W_{y-z(бых)} - W_{y-z(вх)} = \\ &= (u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt - (u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt = \\ &= (u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt - u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt = \\ &= (\frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy dz dt = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt, \end{aligned}$$

Остальные два выражения запишем по аналогии без подробного вывода.

$$dW_{x-z} = W_{x-z(бых)} - W_{x-z(вх)} = \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt,$$

$$dW_{x-y} = W_{x-y(бых)} - W_{x-y(вх)} = \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt,$$

Полный объём жидкости, протекающей за время  $dt$  через выбранный произвольным образом неподвижный элементарный объём пространства  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , будет равен сумме объёмов жидкости, протекающей через все три пары противоположащих граней

$$dW = dW_{y-z} + dW_{x-z} + dW_{x-y}.$$

Подставив в последнее выражение значения соответствующих объёмов  $dW_{y-z}$ ,  $dW_{x-z}$ ,  $dW_{x-y}$ , получим:

$$dW = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt + \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt + \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt =$$

$$= \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

В этом выражении произведение  $dx dy dz$  ни что иное, как весь объём жидкости  $W$ , протекающей через рассматриваемый параллелепипед за время  $dt$ . Таким образом, подставив эту формулу в исходное выражение  $\frac{1}{W} \frac{dW}{dt}$  (второе слагаемое – учитывающее изменение объёма в законе сохранения массы), анализом которого мы занимаемся, получим:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt}{dt} \Rightarrow \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Равенство нулю этого выражения называют **уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости в дифференциальной форме** и записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

К такому же выводу можно прийти, основываясь на следующих рассуждениях: если считать жидкость несжимаемой, то условием неразрывности (сплошности) потока можно считать равенство втекающих и вытекающих объёмов, т.е. изменение объёма должно равняться  $0$ . В выражении для  $dW$  величины  $dx, dy, dz, dt$  обязательно имеют положительные (не нулевые) значения. Тогда для того, чтобы  $\frac{dM}{dt} = 0$ , нужно выполнение следующего условия:

ловия:  $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ , которое и есть уже упомянутое выше уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в дифференциальной форме.

Если в полученное уравнение неразрывности добавить слагаемое, учитывающее изменение плотности жидкости во времени  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ , получим формулу, выражающую изменение единичной массы жидкости протекающей за время  $dt$  через объём  $dx, dy, dz$ . Приравняв это уравнение к нулю:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

получим **уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости в дифференциальной форме**.

Его физический смысл заключается в том, что изменение плотности во времени обратно изменению объёма жидкости во времени. Объём же меняется из-за изменения скоростей во времени, т.е. вследствие изменения формы потока.

Последнее выражение есть первое уравнение (условие) в системе дифференциальных уравнений, описывающих движение потока жидкости.

## Лекция 9. Динамика жидкостей

Главная задача данного раздела, вместе с разделом кинематики жидкостей, заключается в установлении связей между силами, существующими в потоке жидкости и характеристиками движения этой жидкости. Напомним, что эти связи в общем случае представляются уравнениями вида:

$$u_x = f_{ux}(x, y, z, t),$$

$$u_y = f_{uy}(x, y, z, t),$$

$$u_z = f_{uz}(x, y, z, t),$$

$$P = f_p(x, y, z, t).$$

Нахождение этих функций является весьма сложной задачей. Поэтому для упрощения её решения Л. Эйлер предположил, что жидкость является идеальной, т.е. не имеющей вязкости, а также то, что все перечисленные функции непрерывные и дифференцируемые, хотя физической причиной непрерывности распределения скоростей в движущейся жидкости является именно вязкость.

### Дифференциальные уравнения Эйлера для движения идеальной жидкости

Рассмотрим произвольную точку  $A$  в потоке жидкости. Давление в этой точке обозначим буквой  $P$ . Выделим вблизи неё прямоугольный объём жидкости размерами  $dx, dy, dz$ .

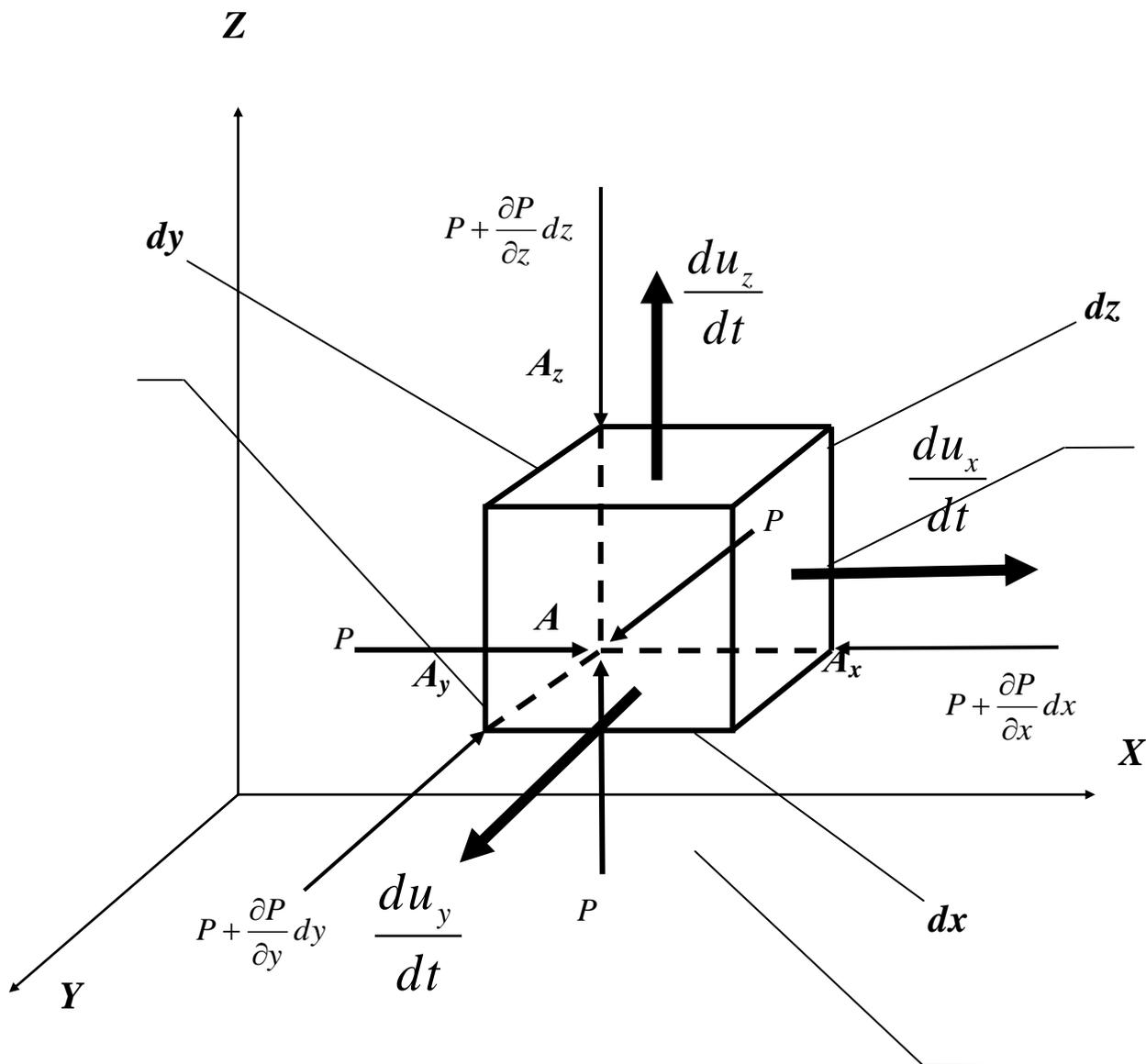
Так же как и в случае вывода дифференциальных уравнений для покоящейся жидкости, систему уравнений, выражающую силы, действующие на выделенный объём, получим в проекциях на оси координат. Определим разность давлений, действующих на противоположные грани:

$$\Delta P_x = P - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) = -\frac{\partial P}{\partial x} dx,$$

$$\Delta P_y = P - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) = -\frac{\partial P}{\partial y} dy,$$

$$\Delta P_z = P - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz) = -\frac{\partial P}{\partial z} dz.$$

Эти уравнения получены с учётом предположения, что давление, как и в ста-



тике, действует по нормали внутрь рассматриваемого объёма, а изменение давления по каждой координате равно частному дифференциалу по соответствующей координате  $\frac{\partial P}{\partial i} di$ . Тогда разности этих сил в проекциях на оси координат будут:

$$\Delta F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz,$$

$$\Delta F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz,$$

$$\Delta F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy.$$

Кроме сил давления, на выделенный объём будут действовать инерционные силы в общем случае определяемые ускорениями  $a_x, a_y, a_z$

$$F_x^{un} = a_x \rho dx dy dz,$$

$$F_y^{un} = a_y \rho dx dy dz,$$

$$F_z^{un} = a_z \rho dx dy dz.$$

Под действием этих сил рассматриваемый объём жидкости движется с ускорением  $\frac{du}{dt}$ , или  $\frac{du_x}{dt}$ ,  $\frac{du_y}{dt}$ ,  $\frac{du_z}{dt}$  в проекциях на оси координат. Тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} a_x - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} = \frac{du_x}{dt} \\ a_y - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} = \frac{du_y}{dt} \\ a_z - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{1}{\rho} = \frac{du_z}{dt} \end{cases},$$

которая носит название *дифференциальные уравнения Эйлера для движения идеальной жидкости*. Эти уравнения справедливы для идеальной жидкости, т.е. для движения без внутреннего сопротивления, и они описывают связь между силами в жидкости и законами её движения.

## Преобразование уравнений Эйлера

Так же как и в статике, чтобы избавиться от частных производных, умножим эти уравнения соответственно на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и сложим их:

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right)}_{dP} = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz.$$

Проанализируем полученную функцию.

Первые три слагаемые ( $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ ) по существу являются суммой инерционных сил или веса, действующих в жидкости. Обозначим эту сумму  $d\Phi$  и назовём её *силовой функцией* или точнее *силовой потенциальной функцией*.

Вспомним из статики, что  $\left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right)$  - есть полный дифференциал давления  $dP$ .

Учтём также, что каждое слагаемое в правой части можно переписать в другом виде. Например,  $\frac{du_x}{dt} dx$  представить как  $du_x \frac{dx}{dt}$ . В свою очередь

$\frac{dx}{dt} = u_x$ . И тогда окончательно  $\frac{du_x}{dt} dx = u_x du_x = \frac{1}{2} du_x^2$ . Применяв такие же преобразования ко всем трём слагаемым, получим:

$$\frac{1}{2} du_x^2 + \frac{1}{2} du_y^2 + \frac{1}{2} du_z^2 = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} du^2.$$

С учётом проведённого анализа преобразуем «сложные уравнения» к *обобщённой форме уравнений Эйлера*:

$$d\Phi - \frac{1}{\rho} dP - \frac{1}{2} du^2 = 0.$$

## Исследование уравнений Эйлера

В правую часть дифференциальных уравнений Эйлера для движущейся идеальной жидкости входит величина  $du_x$ . Её можно представить как полный дифференциал функции независимых переменных для  $du_x$ , который можно записать в виде:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz.$$

Тогда это уравнение для  $du_x$  после деления на  $dt$  будет выглядеть:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt};$$

где:  $\frac{du_x}{dt} = u_x$  - проекция скорости  $\mathbf{u}$  на ось  $X$ .

Тогда окончательно получим:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z.$$

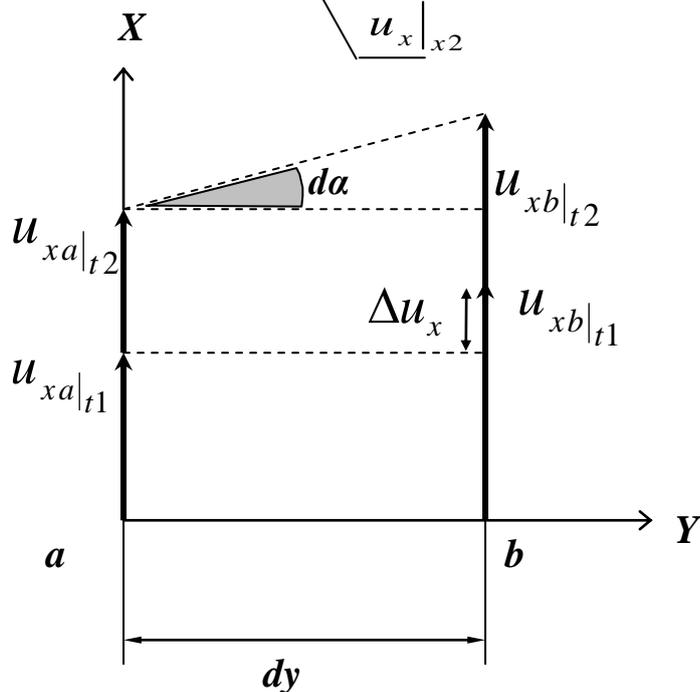
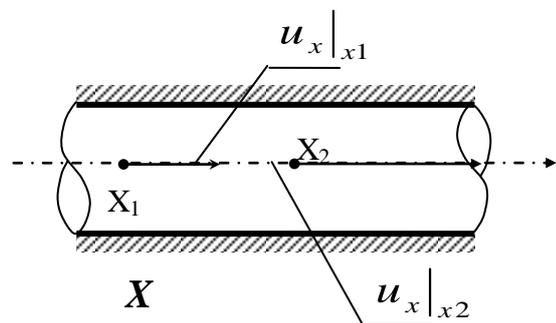
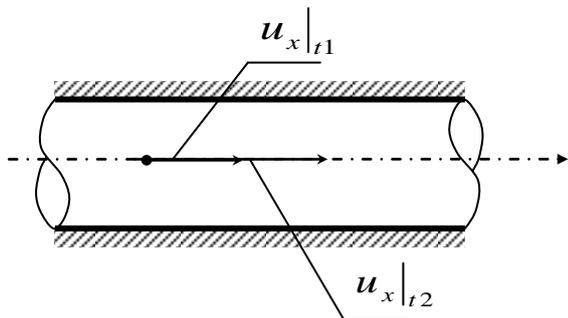
По аналогии то же самое можно записать и для других осей. С учётом таких преобразований система дифференциальных уравнений Эйлера для движущейся жидкости примет вид:

$$\begin{cases} a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z. \end{cases}$$

Физический смысл частных производных в уравнениях Эйлера рассмотрим на примере изменения скорости только по одной координате  $X$ .

Слагаемое  $\frac{\partial u_x}{dt}$  описывает изменение скорости жидкости во времени, т.е. характеризует неустановившийся режим течения жидкости. Если течение

установившееся, то это слагаемое равно нулю.



Величины  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$  - **прямые** частные производные. Они описывают изменение скорости вдоль оси в зависимости от той же координаты.

Члены  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  - **косые** частные производные, т.е. производные по смежной координате, показывающие, как изменяется значение скорости в направлении  $x$  (в проекции на ось  $X$ ) в зависимости от изменения координат на перпендикулярных осях  $Y$  и  $Z$ . Рассмотрим их подробнее.

В момент времени  $t1$  скорость жидкости в точке  $A$   $u_{xa|t1}$  равна  $u_x$ , а в точке

$B$  -  $u_{xb|t1} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ . Естественно, что приращение скорости по оси  $Y$  в этом случае составит  $\Delta u_x = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ .

В момент времени  $t2$  через бесконечно малый промежуток времени  $dt$  ско-

рость в точке  $A$   $u_{xa|t2}$  станет  $u_x dt$ , а в точке  $B$  -  $u_{xb|t2} = u_x dt + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt$ . Тогда тангенс угла  $da$  можно вычислить по формуле:

$$tg da = \frac{u_{xb|t2} - u_{xa|t2}}{ab} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt.$$

Учитывая, что при малых углах их тангенсы равны самим углам, можно записать  $tg d\alpha = d\alpha$ . Тогда  $d\alpha = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt$ . Переписав последнее выражение, окончательно получим:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Это соотношение показывает, что рассмотренная частная производная есть ни что иное, как угловая скорость вращения бесконечно малого отрезка **ab** относительно оси **Y** (т.е., это соотношение описывает вращение вокруг «третьей» оси).

Таким же образом можно исследовать и остальные частные производные

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

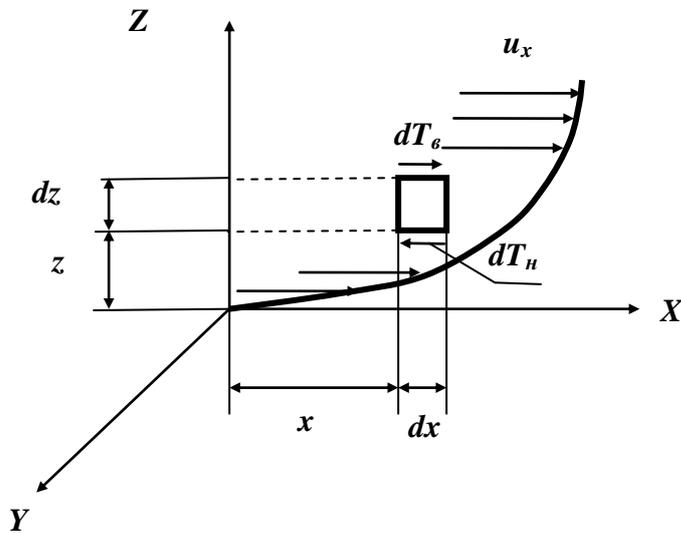
По аналогии с приведёнными выше рассуждениями можно утверждать, что частная производная  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ , так же как и  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ , описывает вращение частиц жидкости в плоскости **XU** относительно оси **Z**, частные производные  $\frac{\partial u_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial y}$  описывают вращение частиц жидкости в плоскости **YZ** относительно оси **X**, а частные производные  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$  описывают вращение частиц жидкости в плоскости **XZ** относительно оси **Y**.

В заключение можно отметить, что такое движение можно наблюдать, например, в водоворотах, которые часто возникают вблизи сливных отверстий при сливе воды из ванн или раковин или в других похожих условиях.

## Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса)

До сих пор мы не рассматривали влияние сил вязкого трения на движение жидкости. Попробуем учесть эти силы. Для простоты рассмотрим движение реальной (вязкой) жидкости в проекции на одну координату. Будем считать, что частица в форме параллелепипеда с размерами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  движется вдоль оси **X**. За счёт сил вязкого трения на верхнюю и нижнюю поверхности рассматриваемого объёма будут действовать силы трения  $dT_v$  и  $dT_n$  соответственно. Эти силы зависят от площади трения  $dydz$  и величины касательного напряжения на поверхностях трения  $\tau$ . На нижней поверхности сила трения будет:

$$dT_n = \tau dx dy,$$



на верхней она будет чаться на величину щения касательных на- жение вдоль оси  $Z$

$$dT_{\tau} = \left( \tau + \frac{d\tau}{dz} dz \right) dx dy.$$

Равнодействующая этих сил, действующая на рассматриваемый объём будет равна разности сил трения

$$dT_{\tau} - dT_{\eta} = \left( \tau + \frac{d\tau}{dz} dz \right) dx dy - \tau dx dy =$$

или

$$dT_x = \frac{d\tau}{dz} dW,$$

где  $dW$  - величина рассматриваемого объёма жидкости.

Напряжение внутреннего трения, обусловленного вязкостью, по закону жидкостного трения имеет вид:

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy},$$

где  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости.

После подстановки получим:

$$dT_x = \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du_x}{dy} \right) dW = \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} dW.$$

В уравнениях Эйлера все силы отнесены к единичной массе, поэтому и силы, обусловленные вязким трением, приведём к такому же виду:

$$\frac{dT_x}{\rho dW} = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \nu \frac{d^2 u_x}{dy^2},$$

где  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  - кинематический коэффициент вязкости.

Если подобные рассуждения провести для остальных координат, т.е. перейти к общему случаю пространственного движения, когда составляющие скорости  $u_x, u_y, u_z$  являются функциями трёх координат  $X, Y, Z$ . В таком случае проекция силы вязкого трения на ось  $X$  в пересчёте к единице массы даёт величину:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right).$$

Аналогичные выражения можно записать для двух других координат. Если уравнения Эйлера для движущейся жидкости дополнить проекциями сил вязкого трения на оси координат, получатся **дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости**, которые носят название **уравнения Навье-Стокса** и имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = a_x - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{d^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{d^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{d^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{du_y}{dt} = a_y - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{d^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{d^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{d^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{du_z}{dt} = a_z - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{d^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{d^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{d^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

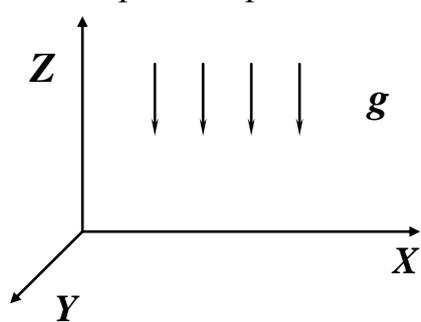
## Лекция 10. Интегрирование уравнений Эйлера

Интегрирование уравнений Эйлера рассмотрим на широко распространённом примере движения жидкости под действием силы тяжести. Примерами такого движения могут служить: течение реки, ручья или любого другого потока жидкости, течение жидкости в водопроводе, работающем от водонапорной башни.

Движение жидкости описывается обобщённой формой уравнений Эйлера

$$d\Phi - \frac{1}{\rho} dP - \frac{1}{2} du^2 = 0.$$

В рассматриваемом случае, когда движение жидкости осуществляется исключительно под действием силы тяжести, **силовая потенциальная функция**



$$d\Phi = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

принимает вид:

$$d\Phi = -gdz,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Подставив это выражение в уравнение Эйлера, и умножив на « $-1$ », для того, чтобы избавиться от знаков «минус» перед каждым слагаемым, получим:

$$gdz + \frac{dP}{\rho} + \frac{du^2}{2} = 0.$$

После интегрирования придём к виду:

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - C = 0,$$

где  $C$  – постоянная интегрирования (знак « $-$ » перед ней не имеет физического значения и поставлен только для удобства последующих математических преобразований).

Разделив последнее равенство на  $g$ , придём к окончательному виду:

$$z + \frac{P}{g\rho} + \frac{u^2}{2g} = H.$$

Полученное выражение называется **интегралом Бернулли**, а постоянная величина  $H$  носит название **гидродинамический напор или полный напор**. Другое название интеграла Бернулли, которое применяется значительно чаще, – **уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости**.

## Уравнение Бернулли

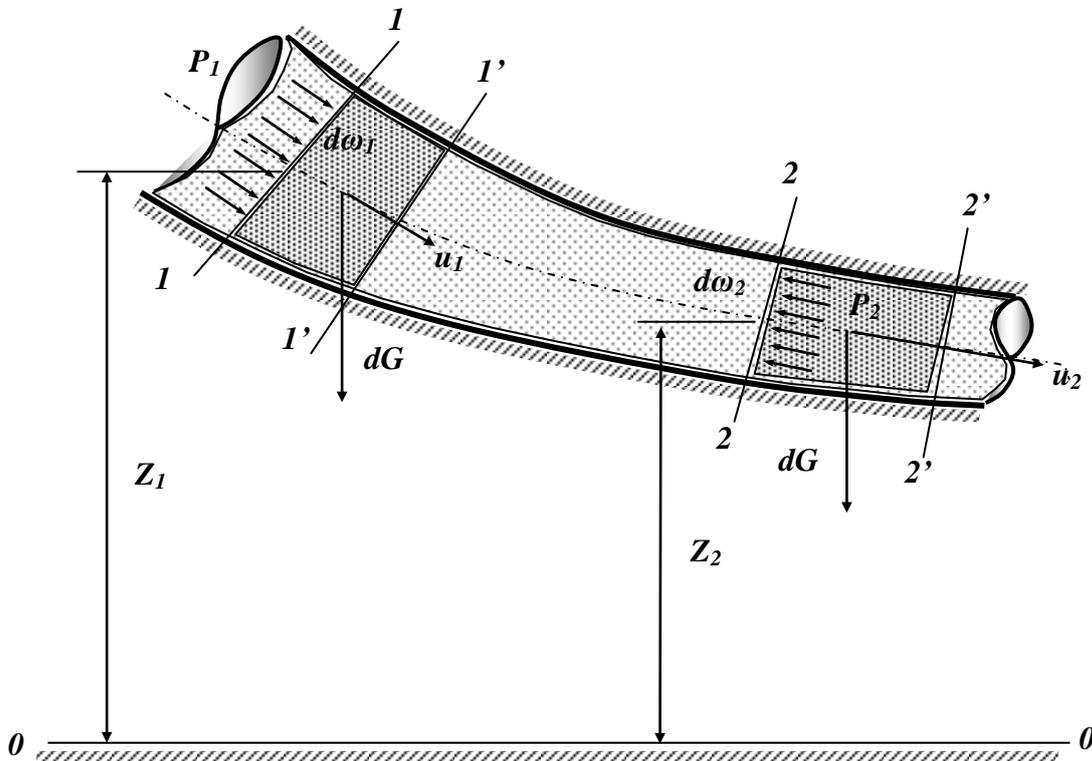
Выше уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости получено строгими математическими методами, использующимися в классической гидромеханике. То же уравнение можно получить (не строго), используя рассуждения, которые часто применяются в гидравлике.

### Уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости

Рассмотрим элементарную струйку идеальной жидкости при установившемся движении, в которой выделим два сечения **1-1** и **2-2**. Площади живых сечений потока обозначим  $d\omega_1$  и  $d\omega_2$ . Положение центров тяжести этих сечений относительно произвольно расположенной линии сравнения (нулевой линии)  $0-0$  характеризуется величинами  $z_1$  и  $z_2$ . Давления и скорости жидкости в этих сечениях имеют значения  $P_1, P_2$  и  $u_1, u_2$  соответственно.

Будем считать, что движение струйки жидкости происходит только под действием силы давления (внутреннее трение в жидкости отсутствует), а давление обладает свойствами статического и действует по нормали внутрь рассматриваемого объёма.

За малый промежуток времени  $dt$  частицы жидкости из **1-1** переместятся в **1'-1'** на расстояние, равное  $u_1 dt$ , а частицы из **2-2** в **2'-2'** на расстояние  $u_2 dt$ .



Согласно теореме кинетической энергии приращение энергии тела (в данном случае выделенного объёма жидкости) равно сумме работ всех действующих на него сил.

Работу в данном случае производят силы давления, действующие в рассматриваемых живых сечениях струйки **1-1** и **2-2**, а также силы тяжести. Тогда работа сил давления в сечении **1-1** будет положительна, т.к. направление силы совпадает с направлением скорости струйки. Она будет равна произведению силы  $P_1 d\omega_1$  на путь  $u_1 dt$ :

$$P_1 d\omega_1 u_1 dt .$$

Работа сил давления в сечении **2-2** будет отрицательной, т.к. направление силы противоположно направлению скорости. Её значение

$$- P_2 d\omega_2 u_2 dt .$$

Полная работа, выполненная силами давления, примет вид:

$$P_1 d\omega_1 u_1 dt - P_2 d\omega_2 u_2 dt .$$

Работа сил тяжести равна изменению потенциальной энергии положения выделенного объёма жидкости при перемещении из сечения **1-1** в сечение **2-2**. С учётом условия неразрывности потока и несжимаемости жидкости выделенные элементарные объёмы будут равны и, следовательно, будут равны их веса  $dG$ :

$$dG = \rho g u_1 d\omega_1 dt = \rho g u_2 d\omega_2 dt .$$

При перетекании от сечения **1-1** в сечение **2-2** центр тяжести выделенного объёма переместится на разность высот  $(z_1 - z_2)$  и работа, произведённая силами тяжести, составит:

$$dG(Z_1 - Z_2) .$$

Проанализируем теперь изменение кинетической энергии рассматриваемого объёма элементарной струйки жидкости.

Приращение кинетической энергии выделенного объёма за  $dt$  равно разности его кинетических энергий в сечениях **1-1** и **2-2**. Это приращение составит

$$\frac{dG}{g} u_1^2 - \frac{dG}{g} u_2^2 = (u_1^2 - u_2^2) \frac{dG}{2g} .$$

Приравняв приращение кинетической энергии сумме работ сил тяжести и сил давления, придём к виду:

$$dG(Z_1 - Z_2) + P_1 d\omega_1 u_1 dt - P_2 d\omega_2 u_2 dt = (u_1^2 - u_2^2) \frac{dG}{2g} .$$

Разделив обе части на вес  $dG$ , т.е. приведя уравнение к единичному весу, получим

$$\frac{dG(Z_1 - Z_2)}{dG} + \frac{P_1 d\omega_1 u_1 dt}{\rho g u_1 d\omega_1 dt} - \frac{P_2 d\omega_2 u_2 dt}{\rho g u_2 d\omega_2 dt} = (u_1^2 - u_2^2) \frac{dG}{2g} \frac{1}{dG}.$$

После сокращения и преобразований придём к искомому виду

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Если учесть, что сечения **1-1** и **2-2** выбраны произвольно, можно прийти к выводу, что сумма приведённых выше величин  $z_i + \frac{P_i}{\rho g} + \frac{u_i^2}{2g}$ , описывающих движение жидкости под действием сил давления и сил тяжести есть величина постоянная для элементарной струйки, т.е.

$$Z + \frac{P}{g\rho} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}(= H).$$

Таким образом, снова получено то же (ранее полученное интегрированием уравнений Эйлера) **уравнение Бернулли для элементарной струйки** невязкой жидкости при установившемся движении под действием сил тяжести.

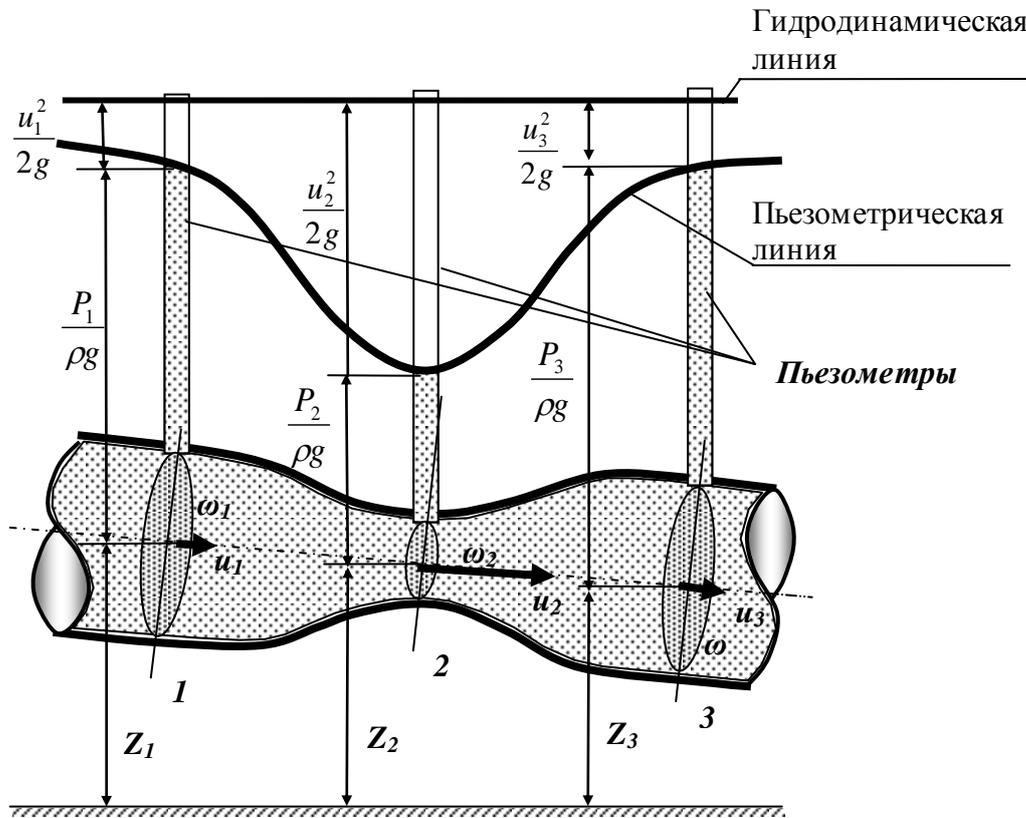
### Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли

Положение любой частицы жидкости относительно некоторой произвольной линии нулевого уровня **0-0** определяется вертикальной координатой **Z**. Для реальных гидравлических систем это может быть уровень, ниже которого жидкость из данной гидросистемы вытечь не может. Например, уровень пола цеха для станка или уровень подвала дома для домашнего водопровода.

- Как и в гидростатике, величину **Z** называют **нивелирной высотой**.
- Второе слагаемое -  $\frac{P}{g\rho}$  носит название **пьезометрическая высота**. Эта величина соответствует высоте, на которую поднимется жидкость в пьезометре, если его установить в рассматриваемом сечении, под действием давления **P**.
- Сумма первых двух членов уравнения  $Z + \frac{P}{g\rho}$  — **гидростатический напор**.
- Третье слагаемое в уравнения Бернулли  $\frac{u^2}{2g}$  называется **скоростной высотой** или **скоростным напором**. Данную величину можно представить как высоту, на которую поднимется жидкость, начавшая двигаться вертикально со скоростью **u** при отсутствии сопротивления движению.

- Сумму всех трёх членов (высот) называют *гидродинамическим или полным напором* и, как уже было сказано, обозначают буквой *H*.

Все слагаемые уравнения Бернулли имеют размерность длины и их можно изобразить графически.



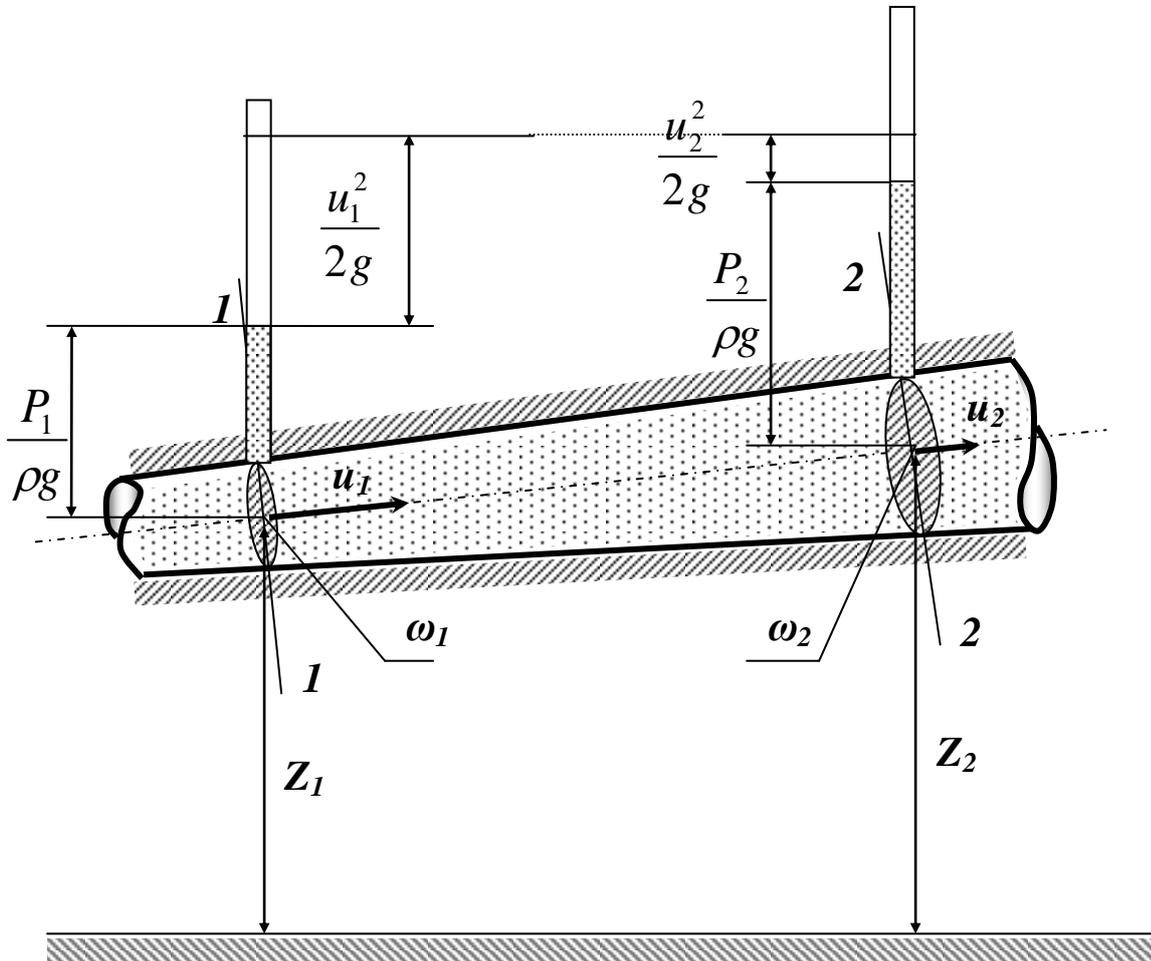
Значения  $z, \frac{P}{\rho g}, \frac{u^2}{2g}$  - *нивелирную, пьезометрическую и скоростную высоты* можно определить для каждого сечения элементарной струйки жидкости.

Геометрическое место точек, высоты которых равны  $z + \frac{P}{\rho g}$ , называется *пьезометрической линией*. Если к этим высотам добавить скоростные высоты, равные  $\frac{u^2}{2g}$ , то получится другая линия, которая называется *гидродинамической* или *напорной линией*.

Из уравнения Бернулли для струйки невязкой жидкости (и графика) следует, что гидродинамический напор по длине струйки постоянен.

## Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли

Выше было получено уравнение Бернулли с использованием энергетических характеристик жидкости. Суммарной энергетической характеристикой жидкости является её гидродинамический напор.



С физической точки зрения это отношение величины механической энергии к величине веса жидкости, которая этой энергией обладает. Таким образом, гидродинамический напор нужно понимать как энергию единицы веса жидкости. И для идеальной жидкости эта величина постоянна по длине. Таким образом, физический смысл уравнения Бернулли это **закон сохранения энергии для движущейся жидкости**.

$$H = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}.$$

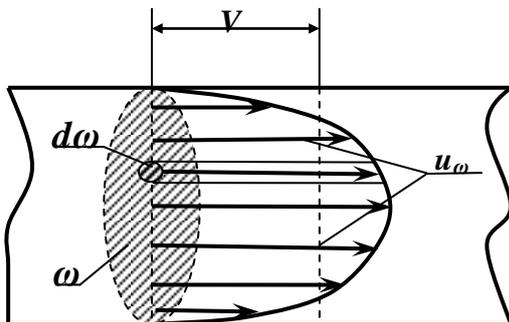
Физический смысл слагаемых, входящих в уравнение следующий:

- **Z** - потенциальная энергия единицы веса жидкости (удельная энергия) – энергия, обусловленная положением (высотой) единицы веса жидкости относительно плоскости сравнения (нулевого уровня), принимаемой за начало отсчета;

- $\frac{P}{\rho g}$  - потенциальная энергия единицы веса жидкости - энергия, обусловленная степенью сжатия единицы веса жидкости, находящейся под давлением  $P$  ;
- $z + \frac{P}{\rho g}$  - полная потенциальная энергия единицы веса жидкости;
- $\frac{u^2}{2g}$  - кинетическая энергия единицы веса жидкости - энергия, обусловленная движением единицы веса жидкости со скоростью  $u$  ;
- $H$  - полная энергия единицы веса жидкости (полная удельная энергия).

### Уравнение Бернулли для потока идеальной жидкости

Поток идеальной жидкости, как указывалось ранее, можно представить совокупностью элементарных струек жидкости. Скорости по сечению потока неодинаковы, причём в середине потока скорости наибольшие, а к периферии они уменьшаются (струйная модель потока). Это означает, что различные струйки в одном сечении имеют различные значения кинетической энергии.



Отсюда следует, что кинетическая энергия, посчитанная с использованием скоростей элементарных струек  $u_\omega$ , и кинетическая энергия, посчитанная с использованием значения средней скорости потока  $V$ , будет иметь разные значения. Выясним, какова эта разница. Кинетическая энергия элементарной струйки  $dE_{эс}$  равна:

$$dE_{эс} = \frac{u_\omega^2 dm}{2},$$

где  $dm$  - масса жидкости плотностью  $\rho$ , протекающей через живое сечение элементарной струйки  $d\omega$  со скоростью  $u_\omega$  за время  $dt$ , равная:

$$dm = u_\omega \rho d\omega dt.$$

Проинтегрировав выражение для  $dE_{эс}$ , получим выражение для кинетической энергии потока идеальной жидкости  $E_n^u$ .

$$E_n^u = \int_\omega dE_{эс}^u = \int_\omega \frac{u_\omega^2 dm}{2} = \int_\omega \frac{u_\omega^2 u_\omega \rho d\omega dt}{2} = \frac{\rho}{2} \int_\omega u_\omega^3 d\omega dt.$$

Если принять, что  $t=1$ , получим:

$$E_n^u = \frac{\rho}{2} \int_{\omega} u_{\omega}^3 d\omega .$$

Последняя формула определяет энергию потока с использованием скоростей элементарных струек  $u_{\omega}$ .

Если получить значение кинетической энергии потока с использованием значения средней скорости потока  $V$ , получим формулу:

$$E_n^V = \frac{mV^2}{2} ,$$

где  $m$  - масса жидкости плотностью  $\rho$ , протекающей через живое сечение потока  $\omega$  со скоростью  $V$  за время  $t$ , равная:

$$m = V\rho\alpha t .$$

После подстановки при  $t=1$  окончательно получим:

$$E_n^V = \frac{\rho}{2} V^3 \omega .$$

Отношение  $E_n^u$  и  $E_n^V$ , равное:

$$\frac{E_n^u}{E_n^V} = \frac{\int u^3 d\omega}{V^3 \omega} = \alpha .$$

Полученная величина  $\alpha$  носит наименование **коэффициент  $\alpha$  кинетической энергии** или **коэффициента Кориолиса**. Смысл этого коэффициента заключается в отношении действительной кинетической энергии потока в определённом сечении к кинетической энергии в том же сечении потока, но при равномерном распределении скоростей. При равномерном распределении скоростей его значение равно единице, а при неравномерном – всегда больше единицы и для любого потока его значение находится в пределах от **1** до **2** и более.

Учитывая коэффициент кинетической энергии, приведём уравнение Бернулли для потока идеальной жидкости, которое примет вид:

$$H_{\text{потока}} = Z + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} .$$

Надо учесть, что в общем случае в разных сечениях потока коэффициент  $\alpha$  будет иметь различные значения.

### Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

В реальных потоках жидкости присутствуют силы вязкого трения. В результате слои жидкости трутся друг об друга в процессе движения. На это трение затрачивается часть энергии потока. По этой причине в процессе движения неизбежны потери энергии. Эта энергия, как и при любом трении, преобразуется в тепловую энергию. Из-за этих потерь энергия потока жидко-

сти по длине потока, и в его направлении постоянно уменьшается. Т.е. напор потока  $H_{\text{потока}}$  в направлении движения потока становится меньше. Если рассмотреть два соседних сечения **1-1** и **2-2**, то потери гидродинамического напора  $\Delta h$  составят:

$$\Delta h = H_{1-1} - H_{2-2},$$

где  $H_{1-1}$  - напор в первом сечении потока жидкости,

$H_{2-2}$  - напор во втором сечении потока,

$\Delta h$  - потерянный напор - энергия, потерянная каждой единицей веса движущейся жидкости на преодоление сопротивлений на пути потока от сечения **1-1** до сечения **2-2**.

С учётом потерь энергии **уравнение Бернулли для потока реальной жидкости** будет выглядеть

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h.$$

Индексами 1 и 2 обозначены характеристики потока в сечениях **1-1** и **2-2**.

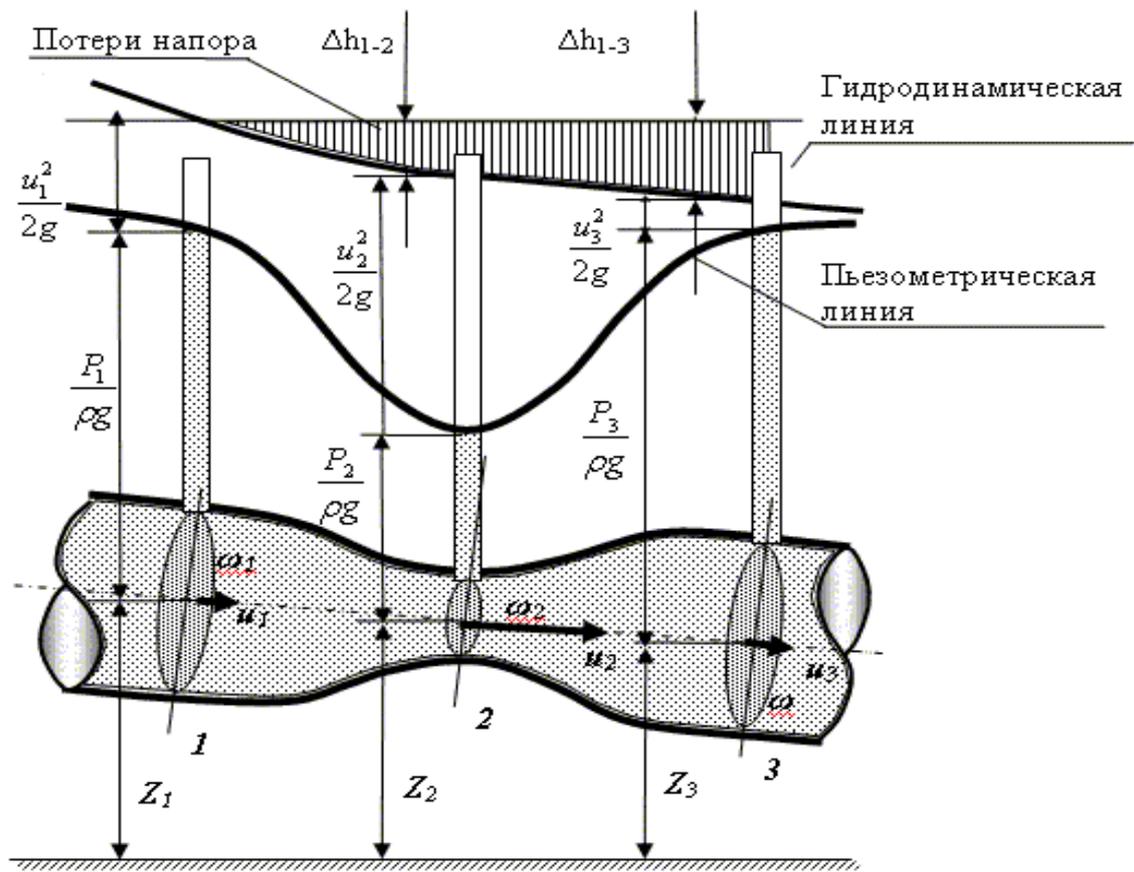
Если учесть, что характеристики потока  $V$  и  $\alpha$  зависят от геометрии потока, которая для напорных потоков определяется геометрией трубопровода, понятно, что потери энергии (напора) в разных трубопроводах будут изменяться неодинаково. Показателем изменения напора потока является **гидравлический уклон  $I$** , который характеризует потери напора на единице длины потока. Физический смысл гидравлического уклона – интенсивность рассеяния энергии по длине потока. Другими словами, величина  $I$  показывает, как быстро трубопровод поглощает энергию потока, протекающего в нём

$$I = \frac{\Delta h}{L_{1-2}}.$$

Изменение энергии по длине потока удобно проследить на графиках. Из уравнения Бернулли для потока реальной жидкости (закона сохранения энергии) видно, что гидродинамическая линия для потока реальной жидкости (с одним источником энергии) всегда ниспадающая. То же справедливо и для пьезометрической линии, но только в случае равномерного движения, когда

скоростной напор  $\alpha \frac{V^2}{2g} = const$ , а уменьшение напора происходит только

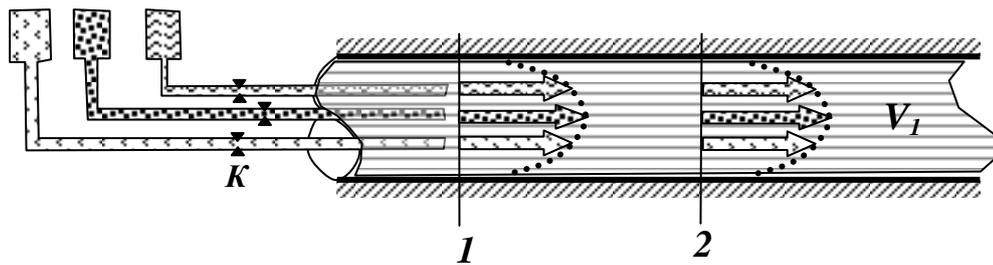
за счёт изменения потенциальной энергии потока, главным образом за счёт уменьшения давления  $P$ .



# Лекция 11. Режимы течения жидкостей

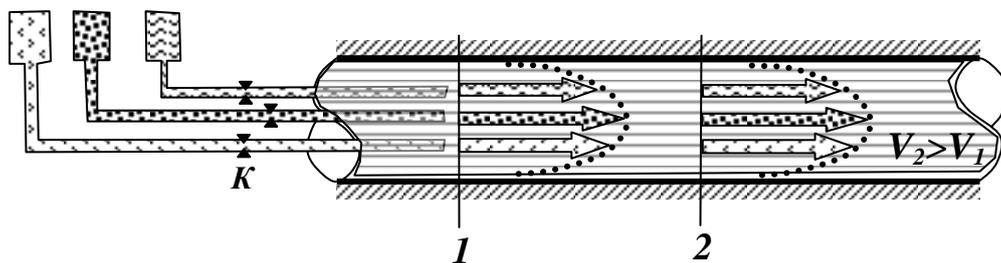
## Два режима течения жидкости

Возьмём прозрачную трубу, в которой с небольшой скоростью  $V_1$  течёт прозрачная жидкость, например, вода. В этот поток поместим небольшие, существенно меньшие, чем диаметр потока, трубки. В трубках под напором находится подкрашенная жидкость, например, цветные чернила, которая может из них вытекать, если открыть краны  $K$ . Будем открывать их на короткое

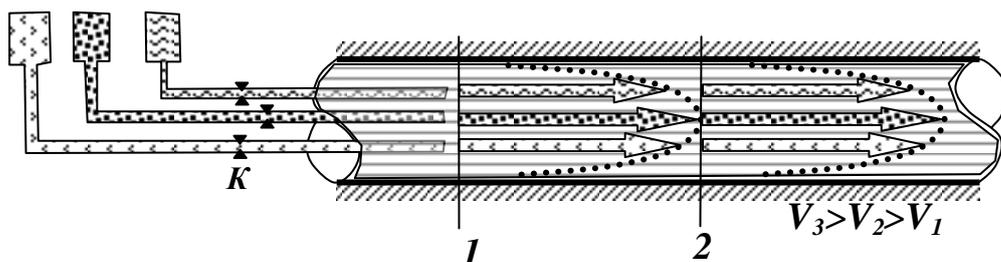


время (1-3 секунды) и прекращать подачу чернил через какие-то промежутки времени так, чтобы можно было проследить движение цветной жидкости. В таком случае в потоке будут возникать разноцветные струйки, причём цветная жидкость будет явно показывать распределение скоростей (эпюра скоростей) по сечению потока. Это распределение будет соответствовать рассмотренной ранее струйной модели потока. Если наблюдать за движением жидкости, то можно ясно видеть, что при перемещении от сечения 1 к сечению 2 картина распределения скоростей будет оставаться постоянной, а движение жидкости будет слоистым, плавным, все струйки тока будут параллельны между собой. Такое *движение* носит название *ламинарное* (от латинского слова lamina - слой).

Если увеличить скорость основного потока до величины  $V_2$  и повторить эксперимент с цветными струйками, то эпюры скоростей как бы вытя-



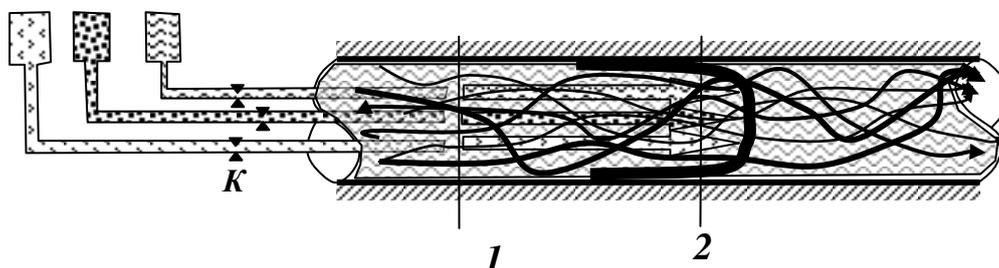
нутся, а характер движения останется прежним, ламинарным. Попутно заметим, что коэффициент кинетической энергии  $\alpha$ , входящий в уравнение Бернулли и учитывающий отношение действительной кинетической энергии потока к кинетической энергии, посчитанной с использованием средней скорости, при «вытягивании» эпюры скоростей возрастает.



Если еще больше увеличить подачу жидкости до скорости  $V_3$ , то эпюры скоростей могут вытянуться ещё больше и при этом течение будет спокойным, плавным – ламинарным. Коэффициент  $\alpha$  приближается к значению **2**.

Однако до бесконечности увеличивать скорость при ламинарном режиме движения потока невозможно. Обязательно наступит такой момент, когда характер движения жидкости радикально изменится. Цветные струйки начнут сначала колебаться, затем размываться и интенсивно перемешиваться. Течение потока становится беспокойным, с постоянным вихреобразованием. Эпюра распределения скоростей по сечению потока приблизится к прямоугольной форме, а значения скоростей в разных сечениях потока станут практически равны средней скорости движения жидкости. Значение коэффициента кинетической энергии  $\alpha$  приближается к **1**.

Такое течение жидкости называется **турбулентным** (от латинского слова



*turbulentus* - возмущённый, беспорядочный).

Если снова уменьшить скорость течения жидкости, восстановится ламинарный режим движения. Переход от одного режима движения к другому будет происходить примерно при одной и той же скорости, которую называют критической скоростью и обозначают  $V_{кр}$ . Эксперименты показывают, что значение этой скорости прямо пропорционально кинематическому коэффициенту вязкости жидкости  $\nu$  и обратно пропорционально диаметру трубопровода  $d$  (для наиболее часто применяемых труб круглого сечения) или гидравлическому радиусу потока  $R$  (для других типов труб и русел).

$$V_{кр} = \kappa \frac{\nu}{d}, \quad \text{или} \quad V_{кр} = \kappa_1 \frac{\nu}{R}.$$

В этих выражениях коэффициенты  $\kappa$  и  $\kappa_1$  - безразмерные величины, одинаковые (близки по данным различных экспериментов) для всех жидкостей (и

газов) для любых размеров труб и сечений потока. В дальнейшем мы будем рассматривать только напорные потоки в трубах круглого сечения.

Безразмерный коэффициент  $к = \frac{V_{кр}d}{\nu}$  называется **критическим числом Рейнольдса** по фамилии английского ученого - физика, исследовавшего в 1883г. два режима течения жидкости. Этот коэффициент обозначается:

$$Re_{кр} = \frac{V_{кр}d}{\nu}.$$

Опытным путём установлено, что критическое число Рейнольдса для круглых труб - **2320** для круглых труб, а для других сечений **580**.

Для определения режима движения в потоке надо найти **фактическое число Рейнольдса  $Re$** , которое можно установить для любого потока по формуле

$$Re = \frac{Vd}{\nu},$$

и сравнить его с критическим числом  **$Re_{кр}$** .

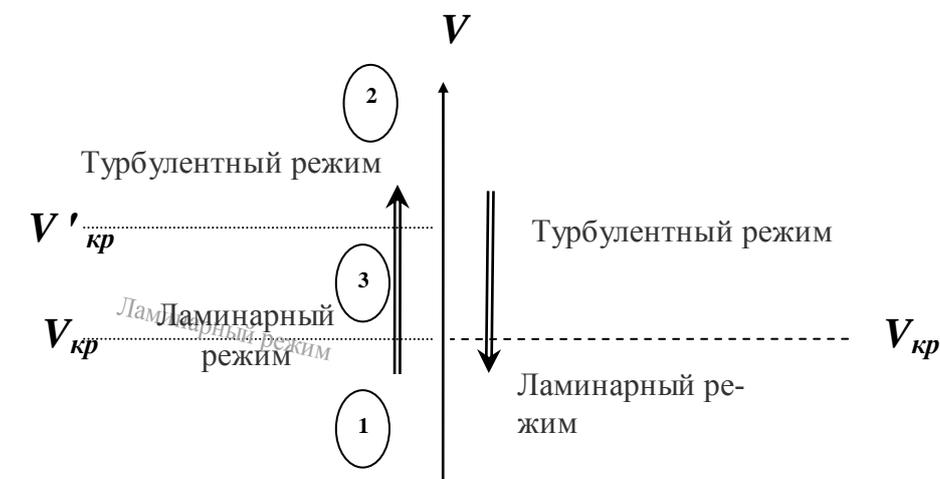
При этом, если  **$Re < Re_{кр}$** , то режим движения ламинарный, если  **$Re > Re_{кр}$** , то режим движения турбулентный.

## Физический смысл числа Рейнольдса

Физический смысл числа Рейнольдса заключается в смене режимов течения жидкости. В настоящее время не существует строгого научно доказанного объяснения этому явлению, однако наиболее достоверной гипотезой считается следующая: смена режимов движения жидкости определяется отношением сил инерции к силам вязкости в потоке жидкости. Если преобладают первые, то режим движения турбулентный, если вторые - ламинарный. Турбулентные потоки возникают при высоких скоростях движения жидкости и малой вязкости, ламинарные потоки возникают в условиях медленного течения и в вязких жидкостях. На практике в различных газопроводах, водопроводах и подобных им системах чаще встречаются турбулентные потоки даже при скоростях менее **1м/с**. В гидросистемах технологического оборудования, в которых в качестве рабочих жидкостей используются минеральные масла, турбулентный режим возникает при скоростях более **15м/с**, тогда как при проектировании таких систем чаще всего предусматривают скорости **4-5м/с**. Режим движения в таких трубопроводах, как правило, ламинарный.

Так как силы инерции и силы вязкости в потоке жидкости зависят от многих причин, то при скоростях, близких к критической, могут возникать переходные режимы, при которых наблюдаются неустойчивое ламинарное или турбулентное движение. Эти режимы отражены на схеме.

Если скорость потока увеличивать, то ламинарный режим (зоны 1 и 3)



переходит в турбулентный (зона 2) при скорости  $V'_{кр}$  – верхняя критическая скорость. Ей соответствует верхнее число Рейнольдса. Если скорость уменьшать, то переход из турбулентного потока в ламинарный происходит при скорости  $V_{кр}$  – нижняя критическая скорость. Ей соответствует нижнее число Рейнольдса. Зону 3 называют неустойчивой, или переходной, зоной. При скоростях, которые к ней относятся, могут существовать как ламинарные, так и турбулентные потоки. Однако ламинарный режим в этой зоне весьма неустойчив и любое возмущение, например, колебание трубы, моментально приводит к возникновению турбулентного потока. По этой причине на практике эту зону всегда относят к турбулентной, а под критерием Рейнольдса понимают нижнее число  $Re_{кр}$ . В зонах же 1 и 2 режимы движения всегда устойчивы. Даже если режим движения в зоне 1 принудительно изменить, например, с помощью специальных устройств – турбулезаторов потока, то через очень короткое время поток снова станет ламинарным.

## Основные особенности турбулентного режима движения

Как уже отмечалось выше, на практике встречаются оба режима движения жидкости, однако наибольшие особенности имеют турбулентные потоки. Перечислим основные из них.

✓ По характеру движения частицы жидкости в турбулентном потоке ведут себя примерно так, как молекулы в представлении кинетической теории газов: они находятся в состоянии беспорядочного хаотического движения. В случае, например, трубопроводов с этим связано существенное возрастание потерь энергии при движении жидкости по сравнению с ламинарным потоком.

- ✓ В турбулентном режиме происходит выравнивание эпюры распределения скоростей по сечению потока.
- ✓ С турбулентным движением связано так же усиление теплопередачи внутри жидкости.
- ✓ Перемешивание определяется наличием в турбулентном потоке уже упомянутых выше, перпендикулярных основному направлению движения жидкости составляющих скоростей.
- ✓ Перемешивание в турбулентно движущейся жидкости приводит к взвешиванию находящейся в потоке в дисперсном состоянии фракции другой фазы (твердые, газообразные и т. п.).
- ✓ Турбулентное движение по самой своей сущности является движением неустановившимся; все гидравлические характеристики и, в частности, скорости в каждой точке занятого турбулентным потоком пространства изменяются с течением времени.

Таким образом, турбулентное движение можно определить как движение жидкости с пульсацией скоростей, приводящей к перемешиванию жидкости.

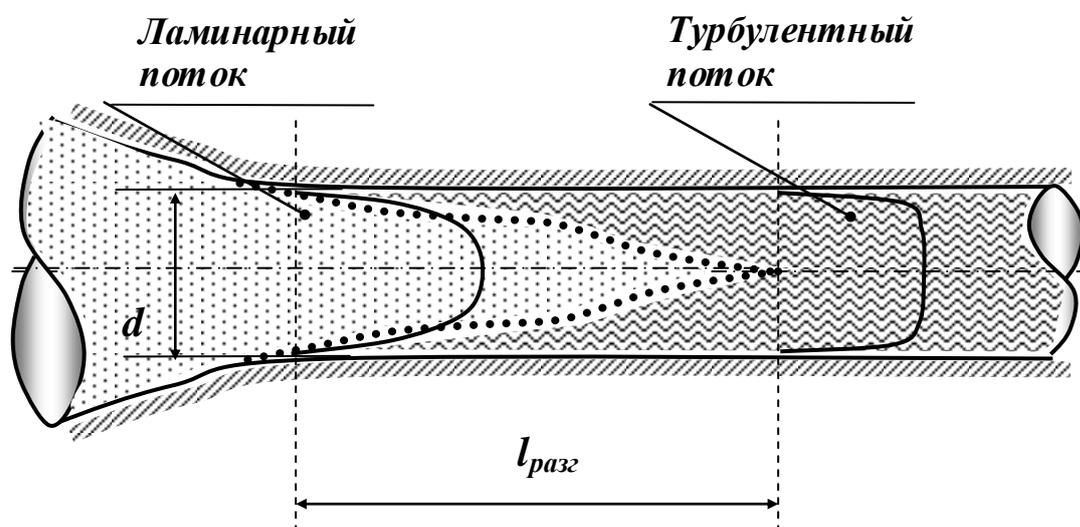
## **Возникновение турбулентного течения жидкости**

Если на каком-то участке трубопровода существует турбулентный поток, то это не значит, что такой же характер сохраняется во всей трубе. На различных участках трубопровода и даже на одних и тех же участках в разные периоды времени поток может иметь различный характер. Это может определяться либо различными диаметрами трубопроводов, либо изменением скорости течения жидкости. Во всех случаях при возникновении условий турбулентного режима он устанавливается в трубе не мгновенно. Это происходит в течение некоторого времени на участке трубы определённой длины. Рассмотрим процесс возникновения турбулентного режима движения.

Переход к турбулентному режиму может происходить из ламинарного, например, в результате плавного или внезапного изменения диаметра трубы. Такой же переход возможен за счёт изменения скорости движения жидкости. К образованию турбулентного режима может приводить также и изменение формы потока жидкости.

Кроме перечисленных возможны и другие причины, особенно при режимах, характеризующихся числами Рейнольдса, близкими к критическому.

На основании опыта установлено следующее. Когда создаются условия для такого перехода, например, сужение проходного сечения трубы достигает значения, при котором поток может стать турбулентным, по периферии



потока ламинарный слой нарушается и дальше по течению развивается **турбулентный пограничный слой**. Толщина этого слоя из-за турбулентного перемешивания достаточно быстро увеличивается, и турбулентный поток заполняет всё сечение трубопровода. Участок, на котором происходит превращение ламинарного режима движения в турбулентный, называется **разгонным участком**. Его длина  $l_{разг}$  по экспериментальным данным равна

$$l_{разг} \approx (40 \div 50)d ,$$

где  $d$  – диаметр трубопровода.

## Возникновение ламинарного режима

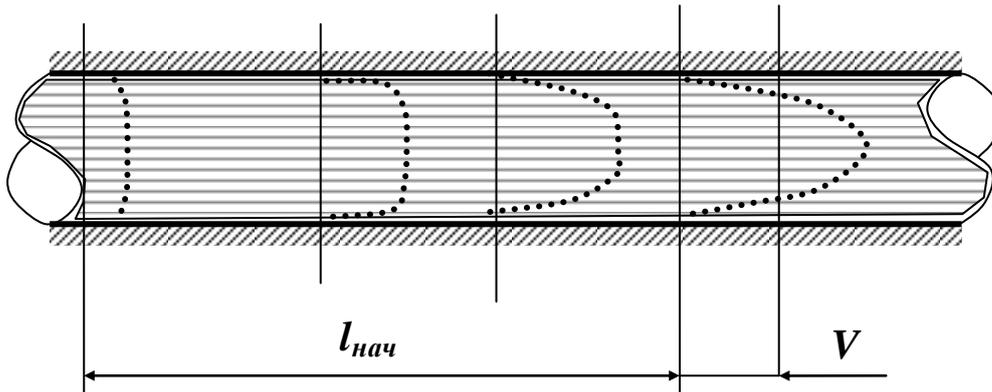
В реальных гидросистемах, даже при ламинарном режиме течения жидкости в круглых трубах, на пути потока встречаются участки с другой геометрией. Это могут быть соединения труб, изгибы, гидроаппараты и т.п. На таких участках характер потока меняется, режим движения становится турбулентным.

Однако после прохождения такого участка при входе жидкости в прямую трубу при соответствующей скорости устанавливается параболическое распределение скоростей. Поток снова стремится к ламинарному режиму движения. Происходит это не моментально, а в течение некоторого времени на отрезке трубы определённой длины. Такой отрезок называют **начальным участком ламинарного течения**  $l_{нач}$ .

Длину такого участка можно определить из **формулы Шиллера**

$$\frac{l_{нач}}{d} = 0,029 Re ,$$

где  $d$  – диаметр трубы.



Отсюда, если в качестве  $Re$  взять критическое число Рейнольдса легко получить, что максимально возможная длина такого участка равна

$$l_{нач} = 0,029 Re_{кр} d = 0,029 \times 2300 d = 66,7d.$$

Потери энергии на этом участке будут несколько больше, чем в остальной части трубы. С учётом этого формула для расчёта потерь напора на трение  $h_{тр}$  при ламинарном движении в круглых гладких трубах принимает вид

$$h_{тр} = \left( 0,165 + \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \right) \frac{V^2}{2g}.$$

Для коротких труб такое уточнение потерь напора может иметь существенное значение, для длинных величину **0,165** можно не учитывать.

## Лекция 12. Гидравлические сопротивления в потоках жидкости

### Сопротивление потоку жидкости

Гидравлическая жидкость в гидросистемах технологического оборудования, как уже обсуждалось ранее, играет роль рабочего тела. Она обеспечивает перенос энергии от источника гидравлической энергии к потребителю (в большинстве случаев, к гидродвигателю). Для такого переноса используются напорные потоки. В подобных потоках жидкость со всех сторон ограничена твёрдыми стенками трубопроводов, каналов гидроаппаратов и полостей гидромашин. В дальнейшем мы будем ориентироваться именно на такие случаи, хотя аналогичные процессы сопровождают и движение безнапорных потоков.

Естественно, что твёрдые стенки препятствуют свободному движению жидкости. Поэтому при относительном движении жидкости и твердых поверхностей неизбежно возникают (развиваются) *гидравлические сопротивления*. На преодоление возникающих сопротивлений затрачивается часть энергии потока. Эту потерянную энергию называют *гидравлическими потерями* удельной энергии или потерями напора. Гидравлические потери главным образом связаны с преодолением сил трения в потоке и о твёрдые стенки и зависят от ряда факторов, основными из которых являются:

- ✓ геометрическая форма потока,
- ✓ размеры потока,
- ✓ шероховатость твёрдых стенок потока,
- ✓ скорость течения жидкости,
- ✓ режим движения жидкости (который связан со скоростью, но учитывает её не только количественно, но и качественно),
- ✓ вязкость жидкости,
- ✓ некоторые другие эксплуатационные свойства жидкости.

Но *гидравлические потери* практически *не зависят от давления* в жидкости.

Величина гидравлических потерь оценивается энергией, потерянной каждой весовой единицей жидкости. Из уравнения Бернулли, составленного для двух сечений потока, обозначенных индексами 1 и 2 *потери энергии по-*

*тока жидкости*  $\Delta h$  можно представить как

$$\Delta h = \left( Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left( Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right).$$

Напомним, что в этом уравнении  $Z + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g}$  - энергия единицы веса жидкости, движущейся в поле сил тяготения,

$Z$  - потенциальная энергия единицы веса жидкости, зависящая от её положения над уровнем нулевого потенциала (линией отсчёта),

$\frac{P}{\rho g}$  - потенциальная энергия единицы веса жидкости, зависящая от степени её сжатия (от давления),

$P$  - давление в потоке жидкости,

$\rho$  - плотность жидкости,

$\frac{\alpha V^2}{2g}$  - кинетическая энергия единицы веса потока жидкости,

$\alpha$  - коэффициент кинетической энергии,

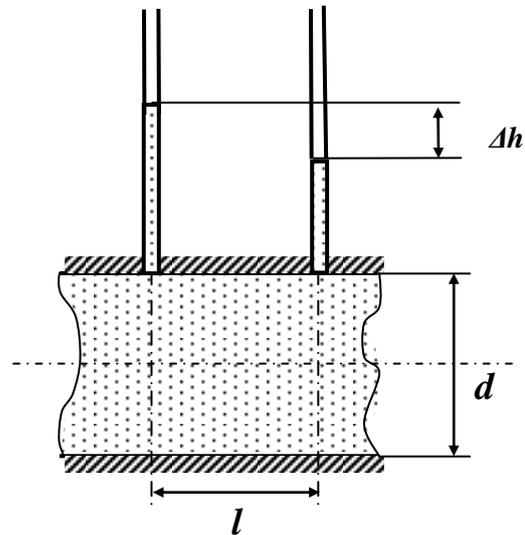
$V$  - средняя скорость потока жидкости,

$g$  - ускорение свободного падения.

Если учесть, что труба в обоих сечениях **1** и **2** имеет одинаковые площади поперечных сечений, жидкость является несжимаемой и выполняется условие сплошности (неразрывности) потока, то, несмотря на гидравлические сопротивления и потери напора, кинетическая энергия в обоих сечениях будет одинаковой. Учтя это, а также то, что при больших давлениях в напорных потоках и небольшой (практически нулевой) разнице нивелирных высот  $Z_1$  и  $Z_2$ , потери удельной энергии можно представить в виде

$$\Delta h = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g}.$$

Опыты показывают, что во многих (но не во всех) случаях потери энергии прямо пропорциональны квадрату скорости течения жидкости, поэтому в гидравлике принято выражать потерянную энергию в долях от кинетической энергии, отнесённой к единице веса жидкости



$$\Delta h = \xi \frac{V^2}{2g},$$

где  $\xi$  - коэффициент сопротивления.

Таким образом, коэффициент сопротивления можно определить как отношение потерянному напору к скоростному напору.

Гидравлические потери в потоке жидкости разделяют на 2 вида:

➤ потери по длине,

➤ местные потери.

## Гидравлические потери по длине

Потери напора по длине, иначе их называют потерями напора на трение  $h_{mp}$ , в чистом виде, т.е. так, что нет никаких других потерь, возникают в гладких прямых трубах с постоянным сечением при равномерном течении. Такие потери обусловлены внутренним трением в жидкости и поэтому происходят и в шероховатых трубах, и в гладких. Величина этих потерь выражается зависимостью

$$h_{mp} = \xi_{mp} \frac{V^2}{2g},$$

где  $\xi_{mp}$  - коэффициент сопротивления, обусловленный трением по длине.

При равномерном движении жидкости на участке трубопровода постоянного диаметра  $d$  длиной  $l$  этот коэффициент сопротивления прямо пропорционален длине и обратно пропорционален диаметру трубы

$$\xi_{mp} = \lambda \frac{l}{d},$$

где  $\lambda$  – *коэффициент гидравлического трения* (иначе его называют *коэффициент потерь на трение* или *коэффициент сопротивления трения*).

Из этого выражения нетрудно видеть, что значение  $\lambda$  - коэффициент трения участка круглой трубы, длина которого равна её диаметру.

С учетом последнего выражения для коэффициента сопротивления потери напора по длине выражаются *формулой Дарси*

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Эту формулу можно применять не только для цилиндрических трубопроводов, но тогда надо выразить диаметр трубопровода  $d$  через *гидравлический радиус потока*  $R$

$$R = \frac{d}{4} \quad \text{или} \quad R = \frac{\omega}{\chi}$$

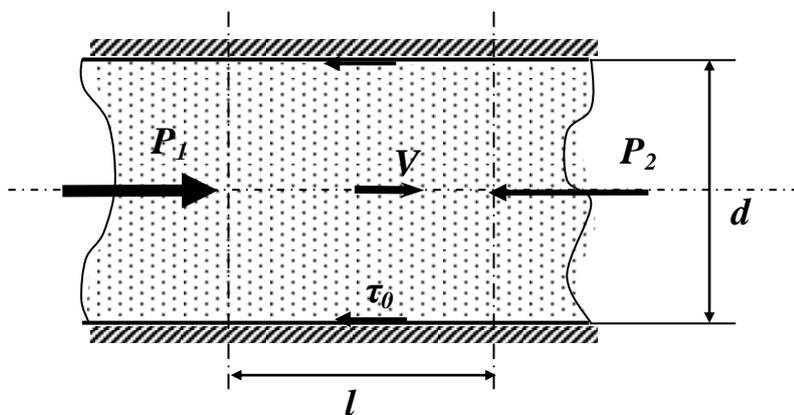
где, напомним,  $\omega$  – площадь живого сечения потока,  
 $\chi$  - смоченный периметр.

Гидравлический радиус можно вычислить для потока с любой формой сечения, и тогда формула Дарси принимает вид

$$h_{mp} = \frac{\lambda l}{4R} \frac{V^2}{2g}.$$

Эта формула справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного режимов движения жидкости, однако коэффициент трения по длине  $\lambda$  не является величиной постоянной.

Для определения физического смысла коэффициента  $\lambda$  рассмотрим объём



жидкости длиной  $l$ , который равномерно движется в трубе диаметром  $d$  со скоростью  $V$ . На этот объём действуют силы давления  $P_1$  и  $P_2$ , причём  $P_1 > P_2$ , и силы трения рассматриваемого объёма о стенки трубы, которые определяются напряжением трения на стенке трубы

$\tau_0$ . Условием равномерного движения под действием сказанных сил будет следующее равенство:

$$\pi \frac{d^2}{4} P_1 - \pi \frac{d^2}{4} P_2 - \pi d l \tau_0 = \pi \frac{d^2}{4} \Delta P - \pi d l \tau_0 = 0.$$

Если учесть, что

$$h_{mp} = \frac{\Delta P}{\rho g}, \quad \text{то} \quad \Delta P = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} \rho g,$$

и подставить эту величину в уравнение сил, действующих на рассматриваемый объём, получим:

$$\pi \frac{d^2}{4} \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} \rho g - \pi d l \tau_0 = 0.$$

Сократив последнее выражение, получим  $\left( \frac{1}{4} \lambda \frac{V^2}{2} \rho - \tau_0 = 0 \right)$ . Выразив из него

$\lambda$ , окончательно будем иметь

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\rho \frac{V^2}{2}}.$$

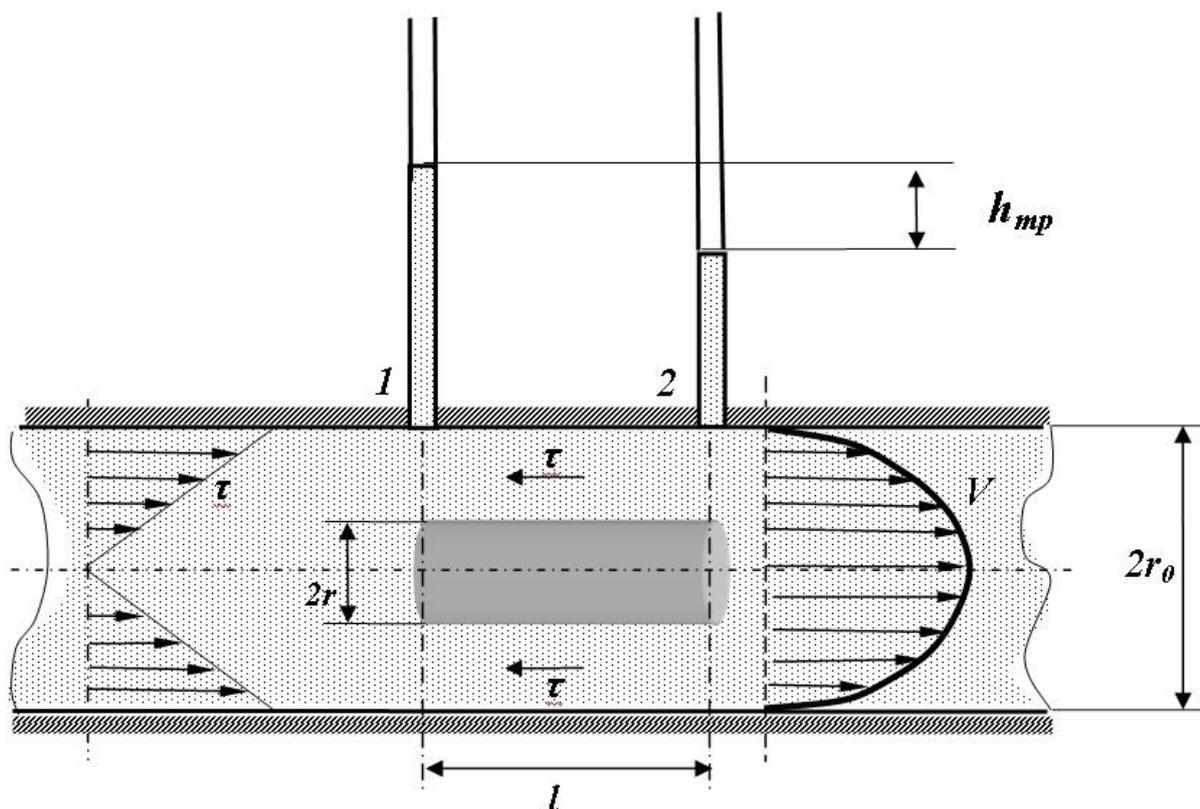
Из полученного выражения следует, что коэффициент гидравлического трения есть величина, пропорциональная отношению напряжения трения на стенке трубы к гидродинамическому давлению, посчитанному по средней скорости потока. Приведённые выше рассуждения и полученные в результате них формулы справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного потоков. Однако коэффициент  $\lambda$  не является величиной постоянной и зависит

от многих факторов. Для выяснения его величины, и связанных с ним потерь энергии необходимо подробно проанализировать режимы движения жидкости.

## Ламинарное течение жидкости

Напомним, что ламинарное течение - это упорядоченное слоистое течение, математическое описание которого основано на законе трения Ньютона.

Для начала рассмотрим установившееся ламинарное течение в круглых трубах. В трубе диаметром  $2r_0$  выделим цилиндрический объём жидкости между сечениями  $1$  и  $2$  длиной  $l$  и диаметром  $2r$ . Отметим, что давления в сечениях  $1$  и  $2$  соответственно равны  $P_1$  и  $P_2$ . Распределение скоростей по сечению потока на всей длине трубы одинаково, поэтому одинаково и значение коэффициента кинетической энергии  $\alpha$ . На рассматриваемый объём, движущийся со скоростью  $V$ , действуют силы давления (на торцовые поверхности) и силы сопротивления, вызванные вязким трением  $\tau$  на боковой



поверхности. Как уже было получено выше

$$h_{mp} = \frac{\Delta P}{\rho g},$$

а уравнение сил, действующих на выделенный объём, будет выглядеть

$$\pi (P_1 - P_2)r^2 = 2\pi l \tau.$$

Выразив отсюда  $\tau$ , получим

$$\tau = \frac{h_{mp} \rho g r}{2l}.$$

Из последней формулы следует, что касательные напряжения трения линейно зависят от радиуса потока. Это показано на рисунке. С другой стороны, касательные напряжения по закону Ньютона равны

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{или, в нашем случае} \quad \tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad \text{т.к. разница скоростей между со-}$$

седними потоками жидкости зависит от радиуса  $r$ . Знак « - » в формуле означает, что отсчёт по  $r$  направлен от оси к стенке, а при отсчете по  $y$  - от стенки к оси потока. Тогда

$$\tau = \frac{h_{mp} \rho g r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Из этого соотношения можно найти приращение скорости

$$du = -\frac{h_{mp} \rho g}{2\mu l} r dr,$$

т.е. при увеличении радиуса скорость уменьшается, что соответствует эпюре скоростей.

После интегрирования, получим

$$\int du = -\int \frac{h_{mp} \rho g}{2\mu l} r dr = -\frac{h_{mp} \rho g}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C,$$

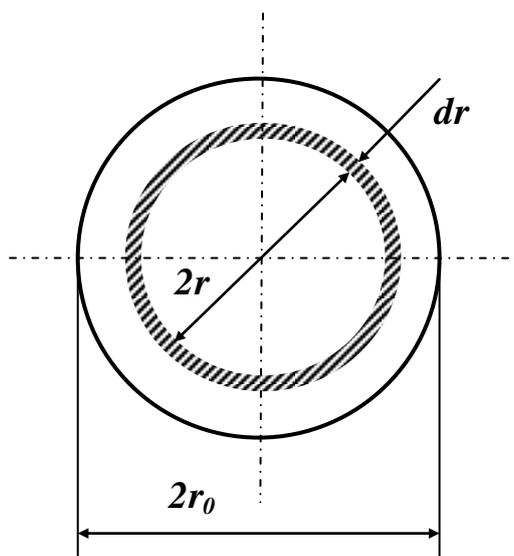
Постоянную интегрирования  $C$  легко определить из известных условий у стенки трубы, т.е. при  $r = r_0$ ,  $u = 0$ . С учётом этих условий  $C$  примет вид

$$C = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} r_0^2. \quad \text{И тогда скорость в ламинарном}$$

потоке в зависимости от радиуса (а практически это скорость цилиндрического слоя жидкости, состоящего из элементарных струек, расположенных на одном радиусе в цилиндрическом потоке) будет описываться формулой

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2),$$

которая, с математической точки зрения, является квадратной параболой и очерчивает эпюру распределения скоростей по сечению потока. Максимальное значение скорости достигается в центре потока при  $r=0$  и составляет



$$u_{\max} = \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} r_0^2.$$

Используя значение скорости  $u$ , определим величину расхода через кольцевую площадь  $d\omega_c$  шириной  $dr$ , находящуюся на расстоянии  $r$  от центра трубы. Выше было отмечено, что скорость в любой точке этого кольца одинакова, и тогда

$$dQ = u d\omega_c = \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr.$$

Проинтегрировав  $dQ$  по всей площади трубы (т.е. от  $r = 0$  до  $r = r_0$ ), получим

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{r_0} \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} 2\pi \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi r_0^2 \int_0^{r_0} r dr - \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi \left( r_0^2 \frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4} \right) = \\ &= \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \pi \frac{r_0^4}{4} = \frac{\pi h_{mp} \rho g}{8 \mu l} r_0^4. \end{aligned}$$

Средняя скорость в таком потоке будет

$$V = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{h_{mp} \rho g}{8 \mu l} r_0^2.$$

Заметим, что средняя скорость потока с параболическим распределением скоростей вдвое меньше максимальной.

Из последнего выражения легко получить **закон сопротивления** потоку, т.е. зависимость потерь энергии от размеров и параметров движения жидкости:

$$h_{mp} = \frac{8 \mu l Q}{\pi r_0^4 \rho g}.$$

Заменив в этом выражении динамический коэффициент вязкости  $\mu = \nu \rho$  кинематическим и выразив радиус трубы  $r_0$  через диаметр  $d$ , получим

$$h_{mp} = \frac{8 \nu \rho l Q}{\pi \left( \frac{d}{2} \right)^4 \rho g} = \frac{128 \nu l Q}{\pi d^4 g}.$$

Полученное выражение носит название **закона Пуазейля** и применяется для расчета потерь энергии с ламинарным течением.

Эту же величину потерь на трение ранее мы выразили формулой Дарси. Если приравнять правые части формулы Дарси и закона Пуазейля, получится:

$$h_{mp} = \lambda \frac{l V^2}{d 2g} = \frac{128\nu l Q}{\pi d^4 g}.$$

Заменим расход произведением  $\frac{\pi d^2}{4} V$  и подставим в последнее равенство

$$h_{mp} = \lambda \frac{l V^2}{d 2g} = \frac{128\nu l}{\pi d^4 g} \cdot \frac{\pi d^2}{4} V = \frac{64\nu l V}{d^2 g 2}.$$

Искусственно умножим и разделим числитель и знаменатель на  $V$ :

$$h_{mp} = \lambda \frac{l V^2}{d 2g} = \frac{64\nu l V V}{d^2 g 2 V} = 64 \frac{\nu}{Vd} \frac{l V^2}{d 2g} = 64 \frac{1}{\text{Re}} \frac{l V^2}{d 2g}.$$

Очевидно, что в этом случае

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Это выражение для коэффициента гидравлического трения при ламинарном движении жидкости хорошо подтверждается экспериментом и используется на практике для определения потерь энергии в потоке при ламинарном течении. Иногда этот коэффициент обозначается  $\lambda_l$ .

Зная полученные выше выражения для скорости элементарной струйки  $u$  и для средней скорости потока  $V$ , можно вычислить значение коэффициента кинетической энергии  $\alpha$  в уравнении Бернулли, который является отношением действительной кинетической энергии к кинетической энергии, посчитанной с применением средней скорости

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{V^3 \omega}.$$

Учтём, что  $\omega = \pi r_0^2$ ,  $d\omega = 2\pi r dr$ , скорости  $V = \frac{h_{mp} \rho g}{8\mu l} r_0^2$  и  $u = \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2)$ . Переменную интегрирования  $\omega$  (площадь живого сечения)

заменяем радиусом. После подстановки в выражение для  $\alpha$  получим:

$$\alpha = \frac{\int_r \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \right)^3 2\pi r dr}{\left( \frac{h_{mp} \rho g}{8\mu l} r_0^2 \right)^3 \pi r_0^2}.$$

Раскроем интеграл в числителе

$$\int_r \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} (r_0^2 - r^2) \right)^3 2\pi r dr = 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 \int_r (r_0^2 - r^2)^3 r dr =$$

$$2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 \int_r (r_0^6 - 3r_0^4 r^2 + 3r_0^2 r^4 - r^6) r dr =$$

$$2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 \left( \int_r r_0^6 r dr - \int_r 3r_0^4 r^2 r dr + \int_r 3r_0^2 r^4 r dr - \int_r r^6 r dr \right)$$

Проинтегрируем эту функцию в пределах от  $0$  до  $r_0$ , т.е. по сечению потока

$$2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 \left( \int_r r_0^6 r dr - \int_r 3r_0^4 r^2 r dr + \int_r 3r_0^2 r^4 r dr - \int_r r^6 r dr \right) =$$

$$2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 \left( r_0^6 r^2 \frac{1}{2} \Big|_0^{r_0} - \frac{3}{4} r_0^4 r^4 \Big|_0^{r_0} + \frac{3}{6} r_0^2 r^6 \Big|_0^{r_0} - \frac{1}{8} r^8 \Big|_0^{r_0} \right) =$$

$$2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 \left( \frac{1}{2} r_0^8 - \frac{3}{4} r_0^8 + \frac{3}{6} r_0^8 - \frac{1}{8} r_0^8 \right) = 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 r_0^8 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} \right) =$$

$$2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 r_0^8 \left( \frac{1}{8} \right)$$

Теперь рассмотрим знаменатель выражения для  $\alpha$ :

$$\left( \frac{h_{mp} \rho g}{8 \mu l} r_0^2 \right)^3 \pi r_0^2 = \pi \left( \frac{1}{2} \right)^3 \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 r_0^8.$$

Разделив полученные числитель на знаменатель, будем иметь значение коэффициента кинетической энергии  $\alpha$ :

$$\frac{2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 r_0^8 \left( \frac{1}{8} \right)}{\pi \left( \frac{1}{2} \right)^3 \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4 \mu l} \right)^3 r_0^8} = 16 \left( \frac{1}{8} \right) = 2.$$

Это значит, что кинетическая энергия ламинарного потока с параболическим распределением скоростей вдвое превышает кинетическую энергию того же потока с равномерным распределением скоростей.

В некоторых случаях удобно знать другой поправочный коэффициент, который учитывает отличие действительного количества движения потока от его значения, посчитанного с использованием средней скорости потока  $V$ . Этот коэффициент обозначают  $\alpha_0$ , называют коэффициентом количества движения и вычисляют по формуле

$$\alpha_0 = \frac{\int u^2 d\omega}{V^2 \omega}.$$

По аналогии с вычислением коэффициента  $\alpha$ , подставив вместо  $u$  и  $V$  соответствующие выражения, после возведения в квадрат и замены переменной интегрирования получим для числителя:

$$\begin{aligned} \int_r \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \right)^2 2\pi r dr &= 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 \int_r (r_0^2 - r^2)^2 r dr = \\ 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 \int_r (r_0^4 - 2r_0^2 r^2 + r^4) r dr &= \\ 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 \left( \int_r r_0^4 r dr - \int_r 2r_0^2 r^2 r dr + \int_r r^4 r dr \right) \end{aligned}$$

После интегрирования в пределах от  $0$  до  $r_0$ , числитель примет вид

$$\begin{aligned} 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 \left( \int_r r_0^4 r dr - \int_r 2r_0^2 r^2 r dr + \int_r r^4 r dr \right) &= \\ 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 \left( r_0^4 r^2 \frac{1}{2} \Big|_0^{r_0} - \frac{2}{4} r_0^2 r^4 \Big|_0^{r_0} + \frac{1}{6} r^6 \Big|_0^{r_0} \right) &= \\ 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 \left( \frac{1}{2} r_0^6 - \frac{1}{2} r_0^6 + \frac{1}{6} r_0^6 \right) &= 2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^3 r_0^6 \left( \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

Знаменатель выражения для  $\alpha$  перепишем в виде

$$\left( \frac{h_{mp} \rho g}{8\mu l} r_0^2 \right)^2 \pi r_0^2 = \pi \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 r_0^6.$$

После деления числителя на знаменатель получим значение коэффициента количества движения  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \frac{2\pi \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 r_0^6 \left( \frac{1}{6} \right)}{\pi \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{h_{mp} \rho g}{4\mu l} \right)^2 r_0^6} = 8 \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{4}{3}.$$

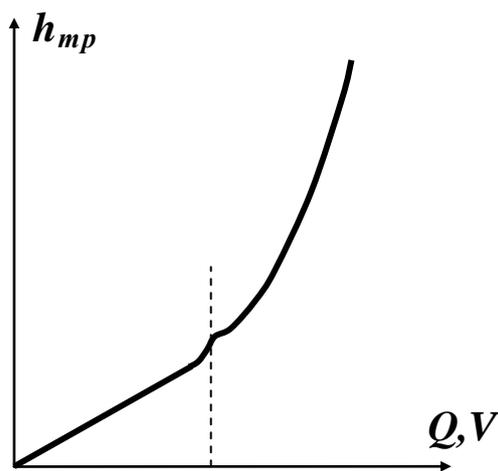
Эта величина для ламинарного потока с параболическим распределением скоростей, так же как и  $\alpha$ , является величиной постоянной.

Все приведённые зависимости справедливы для участков прямых гладких труб постоянного сечения с параболическим распределением скоростей по живому сечению потока.

## Лекция 13. Турбулентное течение жидкости

Напомним, что турбулентное движение жидкости отличается интенсивным вихреобразованием, приводящим к перемешиванию слоёв. В потоке наблюдаются постоянные пульсации давлений и скоростей, как по величине, так и по направлению. Турбулентное течение имеет неустановившийся характер, а траектории движения частиц жидкости постоянно и хаотически меняются. На практике такое движение встречается достаточно часто при высоких скоростях потока и малой вязкости жидкости. Вследствие того, что при турбулентном течении потока нет слоистости, закон трения Ньютона неприменим. По причине сложности турбулентного движения и его аналитического исследования, пока нет достаточно строгой теории этого течения. Существует полуэмпирическая приближённая теория Прандтля, элементы которой будут затронуты ниже, при рассмотрении вопроса о вязком трении в турбулентных потоках.

Потери энергии (потери напора на трение) при турбулентном течении жидкости больше, чем при ламинарном, из-за значительных потерь на вихреобразование, перемешивание и изменение траекторий.



Ламинарный режим       $V_{кр}$       Турбулентный режим

*трение по длине при турбулентном течении*, и он существенно отличается

от  $\lambda_l = \frac{64}{Re}$ , используемом при ламинарном движении жидкости.

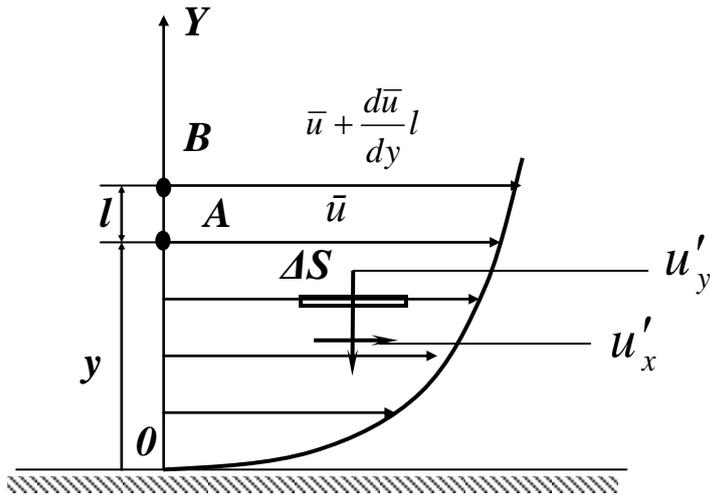
В гидравлике для практических расчётов турбулентного течения жидкости в трубах используют экспериментальные систематизированные данные, применяемые на основе теории подобия. Основной расчётной формулой для определения потерь напора в круглых трубах является уже известная формула Дарси

$$h_{тр} = \lambda_T \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g},$$

однако коэффициент  $\lambda_T$ , в данном случае это *коэффициент на*

### Вязкое трение при турбулентном движении

Выделим в турбулентном потоке, движущимся параллельно твёрдой стенке, элементарную площадку  $\Delta S$  и определим касательное напряжение  $\tau$ , возникающее за счёт пульсаций скоростей  $u'_x, u'_y$ . Через площадку в перпендикулярном потоку направлении, проходит расход жидкости



$$\Delta q_y = u'_x \Delta S .$$

Масса жидкости, проходящая через площадку за время  $\Delta t$ , равна

$$\Delta m = \rho \Delta q_y \Delta t = \rho u'_x \Delta S \Delta t$$

За счёт составляющей пульсаций скорости  $u'_x$  эта масса получит приращение количества движения

$$\Delta m u'_x = \rho u'_x u'_y \Delta S \Delta t .$$

Приращение количества движения равно импульсу силы, т.е.

$$\Delta m u'_x = \Delta F \Delta t = \rho u'_x u'_y \Delta S \Delta t ;$$

где сила  $\Delta F = \tau \Delta S$  и тогда касательное напряжение будет равно

$$\tau \Delta S \Delta t = \rho u'_x u'_y \Delta S \Delta t \Rightarrow \tau = \rho u'_x u'_y ,$$

а его осреднённое по времени значение можно представить в виде

$$\bar{\tau} = \overline{\rho u'_x u'_y} .$$

Определённое таким образом касательное напряжение вычислить очень трудно из-за неизвестных значений  $u'_x$  и  $u'_y$ , поэтому, чаще всего рассматривается приближённое решение.

Представим, что малый объём жидкости, находящийся в точке **A** и имеющий скорость  $\bar{u}$ , в результате турбулентного перемешивания переместился в точку **B**, расположенную на расстоянии  $l$  от точки **A** приобрёл скорость  $\bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy} l$ .

Будем считать, что пульсации скоростей  $u'_x$  и  $u'_y$  пропорциональны приращению скорости рассматриваемого объёма жидкости, т.е.

$$u'_x \approx \frac{d\bar{u}}{dy} l , \quad u'_y \approx \frac{d\bar{u}}{dy} l .$$

Тогда  $\tau$  можно представить в виде

$$\tau = \overline{\rho u'_x u'_y} = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 ,$$

где коэффициент пропорциональности включён в величину  $l$ , знак  $\tau$  совпадает со знаком производной  $\frac{d\bar{u}}{dy}$ . Величина  $l$  носит название **путь перемешивания**.

Последнее уравнение обычно преобразовывают к виду

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = C_T \frac{d\bar{u}}{dy},$$

где  $C_T$  – коэффициент перемешивания, или коэффициент турбулентного обмена который равен

$$C_T = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right).$$

Полученное уравнение аналогично уравнению касательного напряжения при ламинарном режиме. Коэффициент  $C_T$  значительно превышает по величине динамическую вязкость  $\mu$  и зависит от числа Рейнольдса.

## Турбулентное течение в трубах

Несмотря на то, что в общем случае турбулентное движение жидкости является неустойчивым, если рассматривать некоторые усредненные по времени характеристики потока, среднюю скорость, среднее распределение скоростей по сечению, среднее давление, средние величины пульсаций, а также среднее значение расхода, то во многих случаях они могут оказаться постоянными. Именно такие характеристики мы и будем использовать при описании турбулентных потоков.

Многочисленными опытами установлено, что турбулентный поток, как правило, не соприкасается со стенками трубы, а занимает только центральную часть. Между стенками трубы и турбулентным потоком существует тонкий слой жидкости, течение в котором является ламинарным. Причём внешняя часть этого слоя, соприкасающаяся с поверхностью трубы, неподвижна (имеет нулевую скорость), а его внутренняя часть, непосредственно взаимодействующая с потоком, имеет скорость, соизмеримую со средней скоростью жидкости в данном сечении. Таким образом, турбулентный поток движется как бы в трубе из ламинарного слоя той же жидкости. Толщина этого слоя весьма мала. Её можно определить по формуле:

$$\delta = \frac{32,5d}{\text{Re} \sqrt{\lambda_T}},$$

где  $d$  – внутренний диаметр трубы,

$\lambda_T$  – коэффициент потерь на трение при турбулентном режиме течения.

Можно считать, что скорость жидкости внутри этого слоя по толщине меняется по линейному закону. Надо так же отметить, что число Рейнольдса  $Re_{лс}$  (число Рейнольдса для ламинарного слоя), подсчитанное по толщине слоя  $\delta_{лс}$ , скорости внутренней части ламинарного слоя  $u_{лс}$  и кинематическому коэффициенту вязкости  $\nu$  есть величина постоянная.

$$Re_{лс} = \frac{u_{лс} \delta_{лс}}{\nu} = \text{const} .$$

Эта величина имеет постоянное значение для любых турбулентных потоков. Поэтому при увеличении скорости потока растёт скорость ламинарного слоя, а его толщина уменьшается. При больших значениях  $Re$  (больших скоростях) ламинарный слой практически исчезает.

### Турбулентное течение в гладких трубах

Гладкие или точнее технически гладкие трубы это такие, шероховатость внутренних поверхностей которых настолько мала, что практически не влияет на потери энергии на трение. К таким трубам относят

- цельнотянутые трубы из цветных металлов,
- трубы из алюминиевых сплавов,
- стальные высококачественные бесшовные трубы,
- новые высококачественные чугунные трубы,
- новые не оцинкованные трубы.

В основном трубы, используемые в гидросистемах технологического оборудования можно отнести к технически гладким.

Потери напора при турбулентном течении жидкости, как уже отмечалось ранее, могут быть определены по формуле Дарси

$$h_{мп} = \lambda_T \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}$$

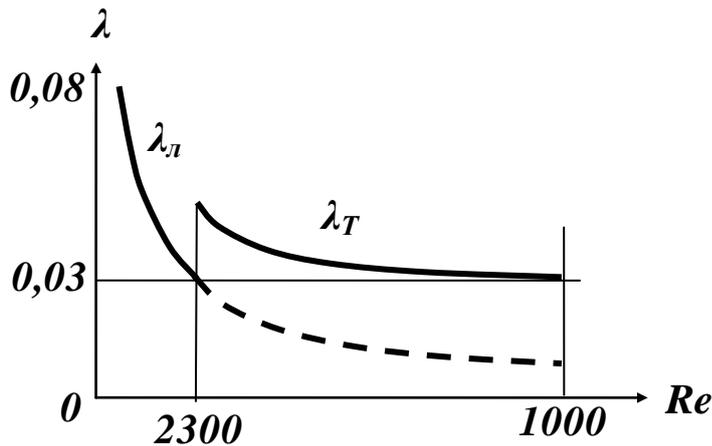
или в виде потерь давление на трение

$$\Delta P_{мп} = \rho \lambda_T \frac{l}{d} \frac{V^2}{2} .$$

Однако коэффициент потерь на трение по длине в этом случае будут значительно больше, чем при ламинарном движении.

Причём сам коэффициент  $\lambda_T$  будет существенно зависеть от числа Рейнольдса. Эту зависимость можно представить в виде графика.

Наиболее применимыми формулами для определения  $\lambda_T$  являются следующие эмпирические и полуэмпирические зависимости



$$\lambda_T = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2},$$

применяемая для чисел Рейнольдса в пределах **2300 ÷ несколько миллионов**, или

$$\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

используемая в интервале **2300 ÷ 100000**.

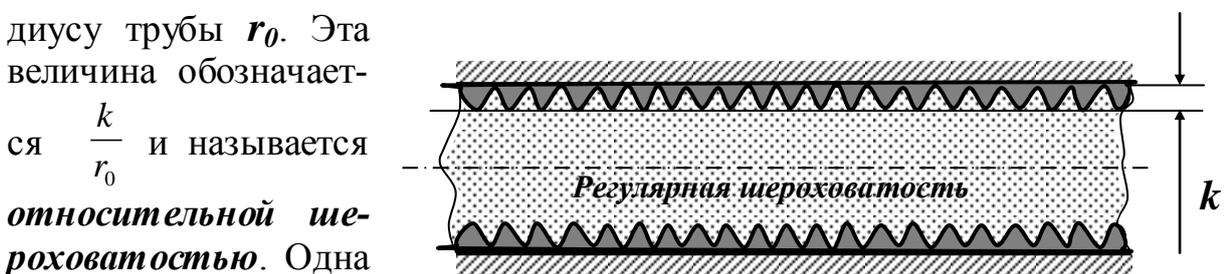
### Турбулентное течение в шероховатых трубах

Исследование течения жидкости в шероховатых трубах практически полностью основываются на экспериментальных исследованиях. На их результатах основаны зависимости и расчётные формулы, применяющиеся для определения потерь энергии в подобных условиях. Основная формула для определения потерь напора – формула Дарси. Отличие заключается только в коэффициенте потерь на трение. В отличие от турбулентных потоков в гладких трубах, где коэффициент на трение полностью определяется числом Рейнольдса  $Re$ , для потоков в трубах имеющих шероховатые внутренние поверхности  $\lambda_T$  зависит ещё и от размеров этой шероховатости. Установ-



лено, что решающее значение имеет не абсолютная высота неровностей (**абсолютная шероховатость**)  $k$ , а отношение высоты этих неровностей к радиусу трубы  $r_0$ . Эта величина обозначается  $\frac{k}{r_0}$  и называется **относительной шероховатостью**. Одна

и та же абсолютная шероховатость может практически не влиять на коэффициент трения в трубах большого диаметра, и существенно увеличивать сопротивление в трубах малого диаметра. Кроме того, на сопротивление потоку жидкости влияет характер шероховатости. По характеру шероховатость разделяют на **естественную**, при которой величина неровностей  $k$  по длине трубы различна, и **регулярную**, при которой размеры неровностей по всей трубе одинаковы. Регулярная шероховатость создаётся искусственно и ха-



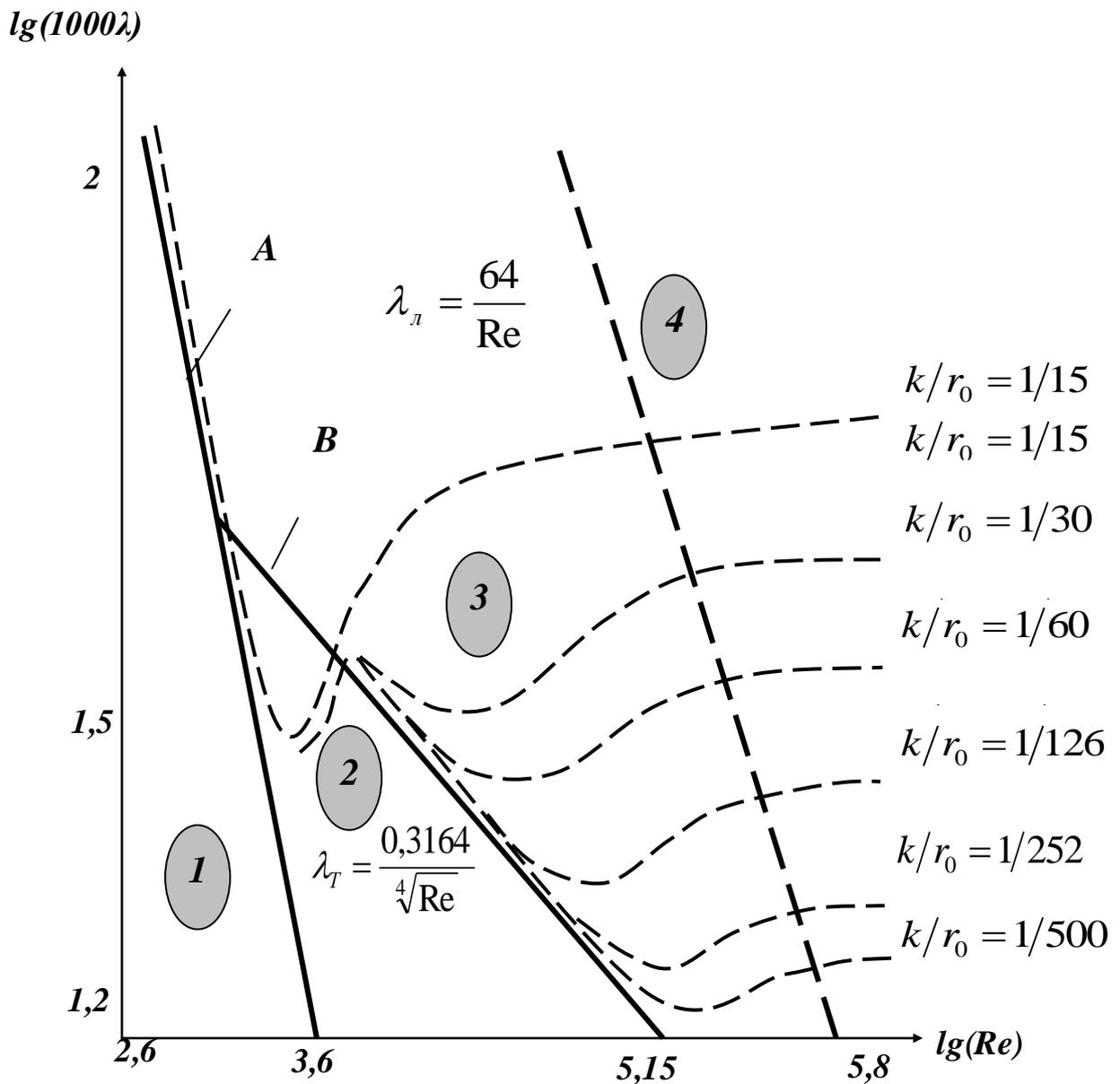
и та же абсолютная шероховатость может практически не влиять на коэффициент трения в трубах большого диаметра, и существенно увеличивать сопротивление в трубах малого диаметра. Кроме того, на сопротивление потоку жидкости влияет характер шероховатости. По характеру шероховатость разделяют на **естественную**, при которой величина неровностей  $k$  по длине трубы различна, и **регулярную**, при которой размеры неровностей по всей трубе одинаковы. Регулярная шероховатость создаётся искусственно и ха-

рактируется тем, что имеет одинаковую высоту и форму неровностей по всей длине трубы. Шероховатость такого вида называют равномерно делённой зернистой шероховатостью. Коэффициент потерь на трение в этом случае описывается функцией

$$\lambda_T = f\left(\text{Re}, \frac{k}{r_0}\right).$$

Экспериментальным изучением влияния числа Рейнольдса и относительной шероховатости занимался **Никурадзе И. И.**, который проводил опыты для диапазонов  $\text{Re} = 500 \div 1000000$  и  $\frac{k}{r_0} = \frac{1}{500} \div \frac{1}{15}$ .

Результаты этих исследований сведены к графику в логарифмических координатах.



На графике цифрами обозначены:

1 – зона ламинарного течения, коэффициент  $\lambda_n$  вычисляется по формуле

$$\lambda_n = \frac{64}{\text{Re}};$$

2 – зона турбулентного гладко стенного течения, коэффициент  $\lambda_T$  вычисляется по формуле

$$\lambda_T = \frac{1}{(1,8 \lg \text{Re} - 1,5)^2}$$

или

$$\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}};$$

3 – зона, так называемого, доквадратичного течения, коэффициент  $\lambda_T$  вычисляется по формуле

$$\lambda_T = 0,11 \left( \frac{K_{\text{э}}}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25};$$

4 – зона квадратичного сопротивления, коэффициент  $\lambda_T$  вычисляется по формуле

$$\lambda_T = 0,11 \left( \frac{K_{\text{э}}}{d} \right)^{0,25}.$$

На практике для определения потерь напора в реальных шероховатых трубах чаще всего используют **формулу Альдиуля**

$$\lambda_T = 0,1 \left( \frac{1,46 K_{\text{э}}}{d} + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25}.$$

В приведённых выше формулах  $K_{\text{э}}$  – эквивалентная абсолютная шероховатость в миллиметрах (абсолютная шероховатость, которая эквивалентна регулярной шероховатости и определяется из таблиц),  $d$  – диаметр трубы.

## Выводы из графиков Никурадзе

- При ламинарном течении шероховатость практически не влияет на сопротивление. Эксперимент практически полностью подтверждает с теоретические формулы.
- Критическое число Рейнольдса от шероховатости не зависит (штриховые кривые отклоняются от прямой **A** в одной точке).
- В области турбулентных течений при небольших числах Рейнольдса и малой шероховатости сопротивление от шероховатости не зависит (штриховая линия совпадает с прямой **B**), а с увеличением **Re** сопротивление возрастает.
- При больших значениях чисел Рейнольдса  $\lambda_T$  перестаёт зависеть от **Re** и становится постоянным для определённой относительной шероховатости.

## Лекция 14. Местные гидравлические потери

### Местные гидравлические сопротивления

*Местными гидравлическими сопротивлениями* называются любые участки гидравлической системы, где имеются повороты, преграды на пути потока рабочей жидкости, расширения или сужения, вызывающие внезапное изменение формы потока, скорости или направления ее движения. В этих местах интенсивно теряется напор. Примерами местных сопротивлений могут быть искривления оси трубопровода, изменения проходных сечений любых гидравлических аппаратов, стыки трубопроводов и т.п. Потери напора на местных сопротивлениях  $\Delta h_m$  определяются по *формуле Вейсбаха*:

$$\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g};$$

где  $\xi_m$  - коэффициент местного сопротивления.

Коэффициент местного сопротивления зависит от конкретных геометрических размеров местного сопротивления и его формы. В связи со сложностью процессов, которые происходят при движении жидкости через местные сопротивления, в большинстве случаев его приходится определять на основании экспериментальных данных с помощью формулы:

$$\xi_m = \frac{\Delta h_m}{\frac{V^2}{2g}}.$$

Однако в некоторых случаях величины коэффициентов местных сопротивлений можно определить аналитически.

Из определения коэффициента  $\xi_m$  видно, что он учитывает все виды потерь энергии потока жидкости на участке местного сопротивления. Его физический смысл состоит в том, что он показывает долю скоростного напора, затрачиваемого на преодоление данного сопротивления.

Коэффициенты различных сопротивлений можно найти в гидравлических справочниках. В том случае, если местные сопротивления находятся на расстоянии меньше  $(25 \div 50)d$  друг от друга ( $d$  - диаметр трубопровода, соединяющего местные сопротивления), весьма вероятно их взаимное влияние друг на друга, а их действительные коэффициенты местных сопротивлений будут отличаться от табличных. Такие сопротивления нужно рассматривать как единое сложное сопротивление, коэффициент  $\xi_m$  которого определяется только экспериментально. Нужно отметить, что из-за взаимного влияния местных сопротивлений, расположенных вблизи друг друга в потоке, во многих

случаях суммарная потеря напора не равна простой сумме потерь напора на каждом из этих сопротивлений.

Местные потери напора можно выразить как через скоростной напор, соответствующий скорости до препятствия в потоке, так и через скоростной напор, подсчитанный по скорости за этим препятствием. Обычно в формулу Вейсбаха подставляют среднюю скорость за препятствием  $V_2$  и в справочниках приводят коэффициент местных сопротивлений применительно к скоростному напору  $\frac{V_2^2}{2g}$ . Иногда коэффициенты местных потерь даются в спра-

вочниках для скоростного напора  $\frac{V_1^2}{2g}$ , где  $V_1$  - средняя скорость до препятствия. Это обстоятельство нужно учитывать при использовании справочников.

Учитывая условие неразрывности потока, можно найти соотношения между коэффициентами местных сопротивлений, определённых по отношению к разным скоростным напорам (до и после сопротивления). Понятно, что при постоянном расходе  $Q$ , скорости в двух сечениях относятся обратно пропорционально площадям живых сечений. Тогда, если одну и ту же местную потерю напора выразить через средние скорости до препятствия  $V_1$  и после него  $V_2$ , то получим:

$$\Delta h_m = \xi_m^{до} \frac{V_1^2}{2g} = \xi_m^{после} \frac{V_2^2}{2g}.$$

Если выразить отношение между по-разному определёнными коэффициентами, будем иметь:

$$\frac{\xi_m^{до}}{\xi_m^{после}} = \frac{V_2^2}{V_1^2} \quad \text{или} \quad \frac{\xi_m^{до}}{\xi_m^{после}} = \frac{\left(\frac{Q}{\omega_1}\right)^2}{\left(\frac{Q}{\omega_2}\right)^2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$$

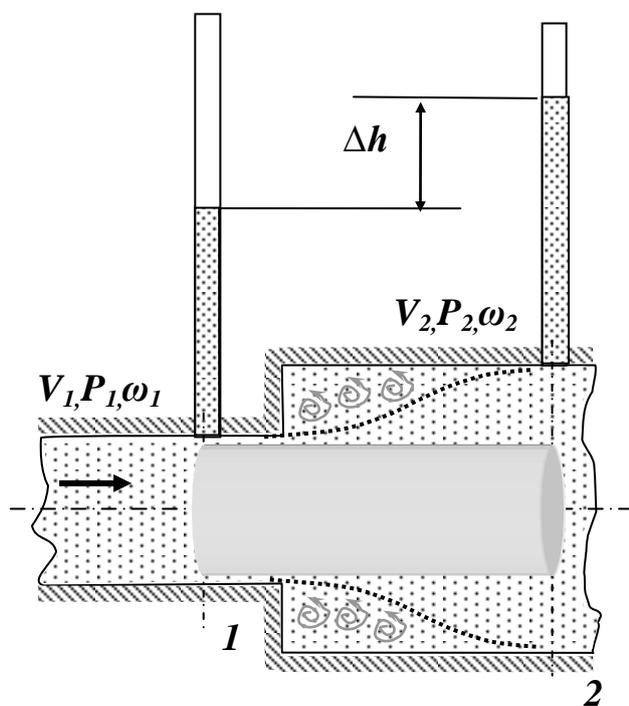
где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - площади живых сечений до и после препятствия, соответственно.

Отметим, что для большинства местных сопротивлений их коэффициент  $\xi_m$  не зависит от числа Рейнольдса при  **$Re > 5000$** . При меньших значениях числа  **$Re$**  коэффициент  $\xi_m$  увеличивается.

## Виды местных сопротивлений

### Внезапное расширение. Теорема Борда - Карно

В этом случае, одном из немногих, выражение для потери напора можно найти теоретическим путем.



При внезапном расширении потока в трубке от сечения **1** до сечения **2** жидкость не течёт по всему контуру стенок, а движется по плавным линиям токов. Вблизи стенок, где внезапно увеличивается диаметр трубы, образуется пространство, в котором жидкость находится в интенсивном вращательном движении. При таком интенсивном перемешивании происходит очень активное трение жидкости о твёрдые стенки трубы об основное русла потока, а также трение внутри вращающихся потоков, вследствие чего происходят существенные потери энергии. Кроме того, какая-то часть энергии жидкости затрачивается на фазовый пе-

реход частиц жидкости из основного потока во вращательные и наоборот. На рисунке видно, что показания пьезометра во втором сечении больше, чем в первом. Тогда появляется вопрос, о каких потерях идёт речь? Дело в том, что показания пьезометра зависят не только от потерь энергии, но и от величины давления. А давление во втором сечении становится больше из-за уменьшения скоростного напора за счёт расширения потока и падения скорости. В этом случае надо учитывать, что если бы не было потерь напора на местном сопротивлении, то высота жидкости во втором пьезометре была бы ещё больше.

Происходящая при внезапном расширении потеря напора может быть найдена с помощью уравнения Бернулли для потока реальной жидкости, записанного для сечений **1** и **2**, где движение основного потока занимает всё сечение трубы, которое будет иметь вид:

$$\Delta h_m = \left( \frac{p_1}{g\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{p_2}{g\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} \right).$$

Применим теорему механики об изменении количества движения к выделенному цилиндрическому объёму, заключённому между сечениями **1** и **2**, равному импульсу внешних сил, действующих на рассматриваемый объём в

направлении его движения. Этими силами будут силы от давления  $P_1$  и  $P_2$  в соответствующих сечениях, действующие на равные по размеру торцовые площади  $\omega_1 = \omega_2$ . (Изменением давления по высоте потока в трубе и силами трения из-за малости участка пренебрежём.) Разность этих сил составляет величину

$$(P_1 - P_2)\omega_1.$$

Этому импульсу соответствует секундное изменение количества движения жидкости, втекающей в рассматриваемый объём и вытекающей из него. Если считать, что скорости по сечениям распределены равномерно, получим:

$$Q\rho V_2 - Q\rho V_1 = Q\rho(V_2 - V_1).$$

Приравняем импульс сил и изменение количества движения по теореме об изменении количества движения

$$(P_1 - P_2)\omega_2 = Q\rho(V_2 - V_1).$$

Разделим уравнение на  $\omega_2$  и учтём, что  $Q = \omega_2 V_2$

$$(P_1 - P_2)\frac{\omega_2}{\omega_2} = \frac{\omega_2 V_2}{\omega_2} \rho(V_2 - V_1) = \rho(V_2^2 - V_1 V_2)$$

Далее произведём сокращения, заменив величину  $V_2^2$  суммой  $\frac{1}{2}V_2^2 + \frac{1}{2}V_2^2$ .

Искусственно добавим в правую часть и тут же вычтем величину  $\frac{1}{2}V_1^2$ :

$$P_1 - P_2 = \rho\left(\frac{1}{2}V_2^2 + \frac{1}{2}V_2^2 - V_1 V_2 + \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{1}{2}V_1^2\right).$$

Перегруппируем члены в правой части равенства

$$P_1 - P_2 = \rho\left(\frac{1}{2}V_2^2 - V_1 V_2 + \frac{1}{2}V_1^2\right) + \rho\frac{1}{2}V_2^2 - \rho\frac{1}{2}V_1^2.$$

Заметим, что величина в скобках может быть упрощена

$$\frac{1}{2}V_2^2 - V_1 V_2 + \frac{1}{2}V_1^2 = \frac{1}{2}(V_2^2 - 2V_1 V_2 + V_1^2) = \frac{1}{2}(V_2 - V_1)^2.$$

Проведя замену, получим

$$P_1 - P_2 = \rho\frac{1}{2}(V_2 - V_1)^2 + \rho\frac{1}{2}V_2^2 - \rho\frac{1}{2}V_1^2.$$

После перегруппировки членов получим

$$P_1 + \rho\frac{1}{2}V_1^2 = P_2 + \rho\frac{1}{2}V_2^2 + \rho\frac{1}{2}(V_2 - V_1)^2$$

Разделим все члены равенства на  $\rho g$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{\rho}{\rho g} \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\rho}{\rho g} \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{\rho}{\rho g} \frac{1}{2} (V_2 - V_1)^2.$$

Окончательно уравнение примет вид

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g}.$$

Сравним полученное уравнение с исходным уравнением для  $\Delta h_m$ , полученным из уравнения Бернулли:

$$\Delta h_m = \left( \frac{p_1}{g\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{p_2}{g\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} \right).$$

Если допустить, что форма эпюр скоростей в первом и втором сечении одинакова, т.е.  $\alpha_1 = \alpha_2$  и их значения приближаются к единице т.к. поток турбулентный, и поменять местами  $V_1$  и  $V_2$ , т.к.  $(V_1 - V_2)^2 = (V_2 - V_1)^2$ , то из сравнения последних уравнений можно получить, что:

$$\Delta h_m = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}.$$

Назвав разность  $(V_1 - V_2)$  потерянной скоростью, можно сказать, что **потеря напора при внезапном расширении равна скоростному напору, подсчитанному по потерянной скорости.** Это утверждение носит имя **теоремы Борда - Карно.**

Последнюю формулу можно переписать в виде:

$$\Delta h_m = \left( 1 - \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{или} \quad \Delta h_m = \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

С учетом того, что на основании уравнения неразрывности потока  $\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2$ , те же потери напора можно представить в виде:

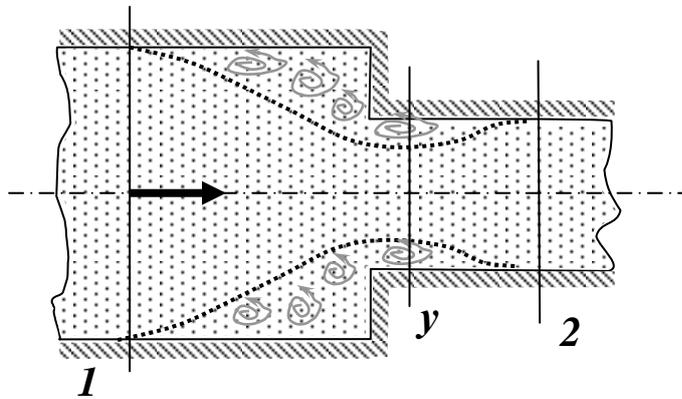
$$\Delta h_m = \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{или} \quad \Delta h_m = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

Сравнивая последние выражения с формулой Вейсбаха  $\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}$ , можно выделить выражения для **коэффициента местного сопротивления при внезапном расширении потока:**

$$\xi_m = \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2, \quad \text{если } \Delta h_m \text{ определять по скорости } V_1;$$

$$\xi_m = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2, \text{ если } \Delta h_m \text{ определять по скорости } V_2.$$

### Внезапное сужение потока



При внезапном сужении, так же как и при внезапном расширении потока, создаются пространства с завихрениями вращающейся жидкости, которые образуются в пристенном пространстве широкой части трубы. Такие же завихрения образуются в начале узкой части трубы за счёт того, что при входе в неё

(узкую часть) жидкость продолжает некоторое время двигаться по инерции в направлении центра трубы, и основное русло потока ещё некоторое время продолжает сужаться. Следовательно, при внезапном сужении потока возникает как - бы два подряд идущих местных сопротивления. Местное сопротивление за счёт сужения основного русла и сразу же за ним местное расширение, уже рассмотренное выше. С учётом этого потери напора при внезапном сужении примут вид

$$\Delta h_m = \xi' \frac{V_y^2}{2g} + \frac{(V_y - V_2)^2}{2g} = \xi_m \frac{V_2^2}{2g};$$

где  $\xi'_m$  - коэффициент местного сопротивления за счёт сужения потока,

$V_y$  - средняя скорость потока в самом узком месте основного русла (в сечении  $y$ ),

$V_2$  - средняя скорость потока в сечении 2.

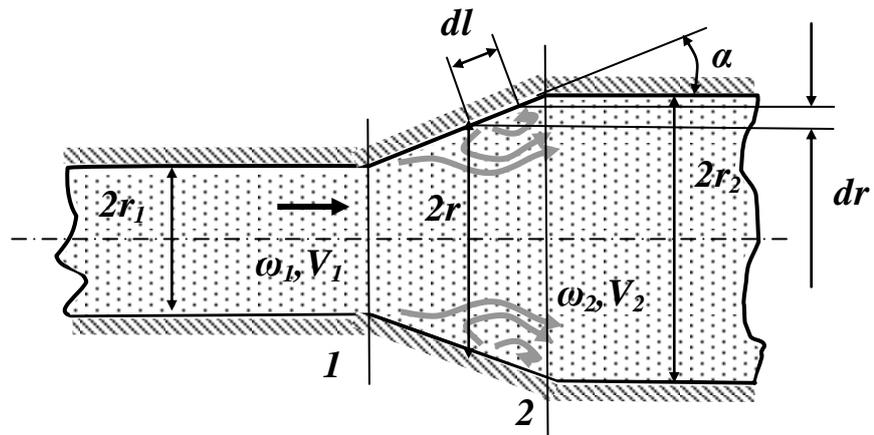
Для практических расчётов чаще всего пользуются следующей полуэмпирической формулой:

$$\xi_m = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right),$$

где  $n$  - степень сужения трубы.

## Постепенное расширение потока

Постепенное расширение трубы называется **диффузором**. Движение жидкости в диффузоре сопровождается уменьшением скорости и повышением давления. Частицы жидкости движутся вперёд, в сторону более высокого давления, по инерции за счёт своей кинетической энергии, которая уменьшается по направлению движения. Кроме того, за счёт расширения трубы частицы жидкости движутся не только вдоль оси потока, но и в направлении от оси к стенкам. В каком-то сечении инерция жидкости уменьшается до такой степени, что её не хватает для преодоления повышающегося давления. Тогда такие частицы жидкости останавливаются или даже начинают двигаться в обратном направлении. В результате возникают вихревые потоки и потоки, отрывающиеся от стенки. Эти явления зависят от скорости и интенсивности расширения потока. Кроме того, в диффузоре происходят обычные потери на трение, подобные потерям по длине в трубах постоянного сечения. Таким образом, потери энергии в диффузоре  $\Delta h_m$  складываются из потерь на трение по длине и потерь на вихреобразование за счёт расширения:



Тогда такие частицы жидкости останавливаются или даже начинают двигаться в обратном направлении. В результате возникают вихревые потоки и потоки, отрывающиеся от стенки. Эти явления зависят от скорости и интенсивности расширения потока. Кроме того, в диффузоре происходят обычные потери на трение, подобные потерям по длине в трубах постоянного сечения. Таким образом, потери энергии в диффузоре  $\Delta h_m$  складываются из потерь на трение по длине и потерь на вихреобразование за счёт расширения:

$$\Delta h_m = \Delta h_{тр} + \Delta h_{расширения} .$$

Для определения этих величин рассмотрим круглый диффузор с углом отклонения стенки от оси, равным  $\alpha$ , и параметрами, приведёнными на рисунке. Определим потери на трение на произвольном элементарном участке диффузора длиной  $dl$ . Увеличение радиуса диффузора на этом участке составит  $dr$ . С учётом этого

$$dl = \frac{dr}{\sin \alpha} .$$

Тогда потери энергии на этом элементарном участке по формуле Дарси составят

$$dh_{mp} = \lambda_r \frac{dl}{2dr} \frac{V^2}{2g} .$$

Из условия постоянства расхода можно записать

$$\omega_1 V_1 = \omega V = \pi r_1^2 V_1 = \pi r^2 V .$$

Отсюда, выразив  $V$ , получим:

$$V = V_1 \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 ,$$

где  $V$  и  $r$  - соответственно скорость жидкости и радиус диффузора в начале произвольно выбранного участка диффузора  $dl$ . Их можно рассматривать, как текущие значения параметров.

Подставив полученные выражения в формулу для  $dh_{mp}$ , получим:

$$dh_{mp} = \lambda_T \frac{dr}{2r \sin \alpha} \left( \frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{V_1^2}{2g} = \lambda_T \frac{dr}{2 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \left( \frac{1}{r^5} \right) .$$

После интегрирования по радиусу в пределах от  $r_1$  до  $r_2$  будем иметь:

$$\begin{aligned} dh_{mp} &= \lambda_T \frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^5} dr = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \left. \frac{-1}{r^4} \right|_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \left( -\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \left( -\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) = \\ &= \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left( 1 - \frac{r_1^4}{r_2^4} \right) \frac{V_1^2}{2g} \end{aligned}$$

Если учесть, что

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = n ,$$

где  $n$  - степень сужения диффузора,

то формулу потерь на трение в диффузоре можно переписать в виде:

$$dh_{mp} = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left( 1 - \frac{r_1^4}{r_2^4} \right) \frac{V_1^2}{2g} = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{V_1^2}{2g} .$$

Второе слагаемое в формуле потерь напора в диффузоре представляет собой потери энергии на расширение потока. Эти потери похожи на потери при внезапном расширении  $\Delta h_m = \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2$ , однако имеют несколько меньшую величину, поэтому в формулу для их определения вводят поправочный коэффициент  $k$ . Численное значение этого коэффициента можно определить по формуле Идельчика:

$$k = 3,2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} ,$$

или приближённо по формуле Флигнера

$$k = \sin 2\alpha .$$

Окончательно формула для определения потерь напора в диффузоре примет вид

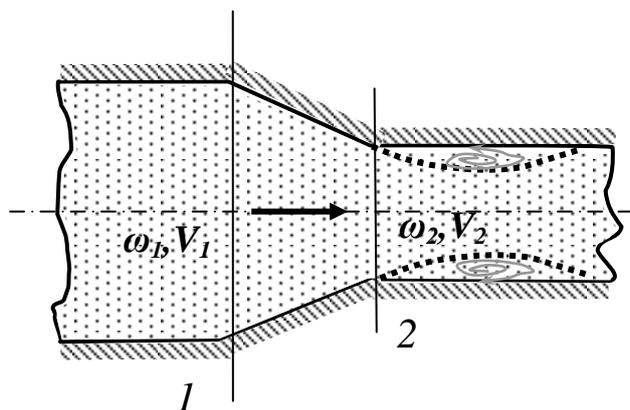
$$\Delta h_m = \left[ \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right] \frac{V_1^2}{2g} .$$

Сравнивая это выражение с формулой Вейсбаха легко выявить коэффициент потерь на местном сопротивлении, который для диффузора будет равняться:

$$\xi_m = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 .$$

### Постепенное сужение потока

Такое сопротивление представляет собой коническую сходящуюся трубку – **конфузор**. Течение в конфузоре сопровождается постепенным увеличением скорости и одновременным снижением давления. По этой причине условия для вихреобразования на конической поверхности отсутствуют. Потери в этой части местного сопротивления происходят только за счёт трения. Вихреобразование может происходить только в узкой части трубы. Его природа аналогична природе подобного вихря при внезапном сужении потока, однако величина существенно меньше. В большинстве работ по гидравлике указывается, что эта величина столь незначительна по сравнению с потерями на трение в конической части конфузора, что ею можно пренебречь.



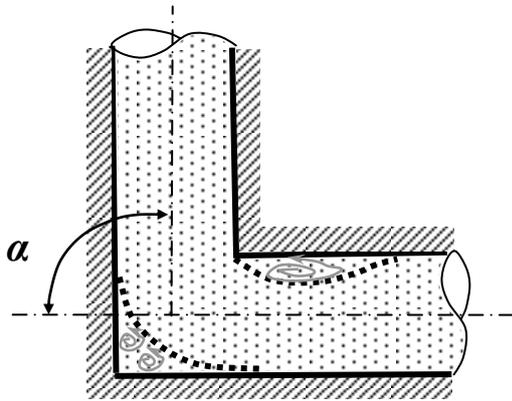
С учётом сказанного, величину этих потерь можно определить по формуле, вывод которой аналогичен выводу формулы потерь на трение в диффузоре. Она имеет вид:

$$\Delta h_m = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{V_2^2}{2g} .$$

Выражение для определения коэффициента потерь на трение в конфузоре будет иметь вид:

$$\xi_m = \frac{\lambda_T}{8 \sin \alpha} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) .$$

## Внезапный поворот потока



Такое местное сопротивление, называемое обычно коленом, очень сильно влияет на потери напора. В нём происходит отрыв потока от стенки трубы и создаются две сложные вихревые зоны, в которых интенсивно теряется энергия. Степень интенсивности существенно зависит от угла поворота  $\alpha$ . Коэффициент местного сопротивления значительно возрастает с увеличением угла поворота, и его можно определить по эмпирической формуле

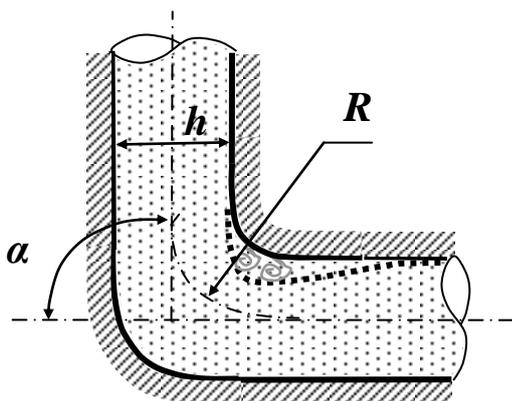
$$\xi_m = 0,95 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2,05 \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

В гидросистемах подобных местных сопротивлений рекомендуется избегать.

## Плавный поворот потока

Постепенный поворот трубы (отвод или закруглённое колено) значительно уменьшает вихреобразование и, следовательно, потери энергии. Величина потерь существенно зависит от отношения  $\frac{R}{d}$  и угла  $\alpha$ .

Коэффициент местного сопротивления для плавного поворота можно определить по экспериментальным формулам. Для поворота под углом  $90^\circ$  и  $\frac{R}{d} > 1$  он равен



$$\xi^{90^\circ}_m = 0,51 + 0,19 \frac{d}{R};$$

для угла поворота более  $100^\circ$

$$\xi_m = \left(0,7 + 0,35 \frac{\alpha^0}{90^0}\right) \xi_m^{90^0};$$

для угла поворота менее  $70^\circ$

$$\xi_m = 0,9 \sin \alpha \xi_m^{90^0}.$$

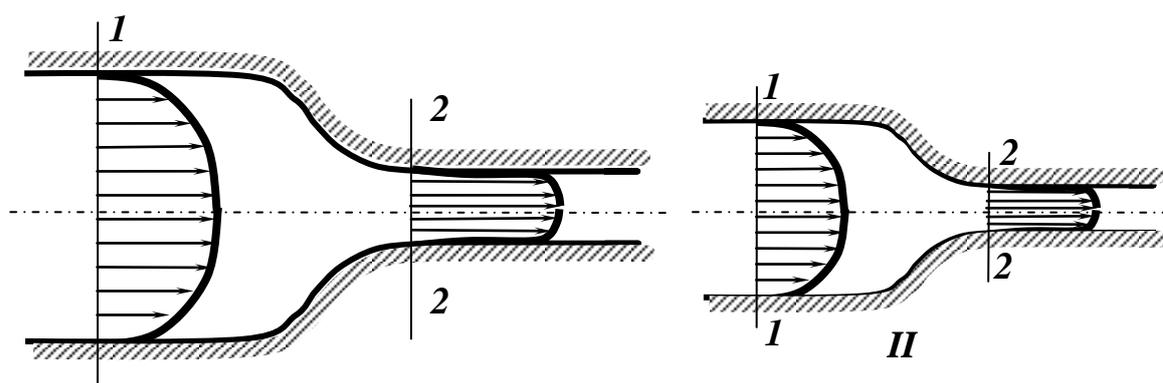
## Лекция 15. Критерии подобия

В процессе проектирования различных гидросистем, трубопроводов, гидротехнических сооружений, гидравлических и газовых систем химических и нефтехимических предприятий нередко возникает необходимость не только математического, но и натурного моделирования. В таком случае необходимо, чтобы работа гидросистемы действующей модели соответствовала функционированию реального объекта. Это означает, что различные характеристики потоков жидкости, которые имеют место в модели и в реальной системе, должны описываться одинаковыми закономерностями, хотя их численные значения могут существенно различаться. В натурной модели они меньше (как правило) или больше (встречается реже), чем в действительности. Для этого необходимо иметь критерии, которые позволяли бы «масштабировать» реальную систему. Эти критерии устанавливаются в теории подобия потоков жидкости.

### Основы теории подобия, геометрическое и динамическое подобие

**Гидродинамическое подобие** - это подобие потоков несжимаемой жидкости, включающее в себя **подобие геометрическое, кинематическое и динамическое**.

Из геометрии известно, что **геометрическое подобие** означает пропорциональность сходственных размеров и равенство соответствующих углов. В гидравлике под геометрическим подобием понимают подобие тех



поверхностей, которые ограничивают потоки жидкости. Таким образом в гидравлике геометрическое подобие означает подобие русел или трубопроводов, по которым течёт жидкость.

**Кинематическое подобие** это подобие линий тока и пропорциональность сходственных скоростей. Это значит, что для кинематического подобия потоков требуется соблюдение геометрического подобия.

**Динамическое подобие** заключается в пропорциональности сил, действующих на сходственные элементы кинематически и геометрически подобных потоков, и равенство углов, характеризующих направление действия этих сил.

В потоках жидкостей (в нашем случае в трубопроводах, в гидромашинах и т.д.) обычно действуют разные силы – силы давления, силы вязкого трения, силы тяжести, инерционные силы. Соблюдение пропорциональности всех сил, действующих в потоке, означает **полное гидродинамическое подобие**.

На практике полное гидродинамическое подобие достигается редко, поэтому обычно приходится ограничиваться **частичным (неполным) гидродинамическим подобием**, при котором имеется пропорциональность лишь основных сил.

Записывается подобие следующим образом. Например, пропорциональность сил давления  $P$  и сил трения  $T$ , действующих в потоках  $I$  и  $II$ , можно записать в виде

$$\left(\frac{P}{T}\right)_I = \left(\frac{P}{T}\right)_{II}.$$

## Критерии подобия для потоков несжимаемой жидкости

### Критерий подобия Ньютона

В подобных потоках силы, с которыми поток воздействует на препятствия - твердые стенки, лопасти гидромашин, обтекаемые потоком тела, и другие преграды, должны быть пропорциональны. Этими силами являются силы инерции движущейся жидкости, которые пропорциональны произведе-

нию динамического давления  $\frac{\rho V^2}{2}$  на преграду при площади воздействия  $S$ .

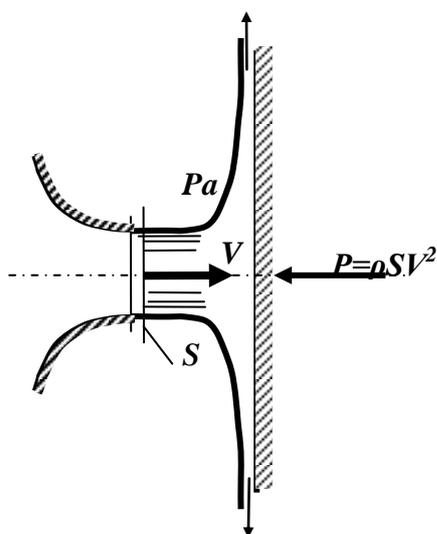
Рассмотрим, как поток жидкости наталкивается на безграничную стенку, установленную нормально к нему, и в результате, растекаясь по ней, меняет свое направление на  $90^\circ$ . На основании теоремы механики о количестве движения секундный импульс силы  $I_F$ , с которой поток действует на стенку, равен:

$$I_F = \rho QV = \rho V^2 S,$$

где  $\rho$  - плотность жидкости,

$Q$  - секундный расход жидкости,

$V$  - средняя скорость жидкости,



$S$  - площадь воздействия струи на преграду.

Это и есть сила воздействия на преграду. Для подобных потоков I и II должно выполняться равенство

$$\frac{F_I}{F_{II}} = \frac{(\rho V_{cp}^2 S)_I}{(\rho V_{cp}^2 S)_{II}},$$

или

$$\left( \frac{F}{(\rho V_{cp}^2 S)} \right)_I = \left( \frac{F}{(\rho V_{cp}^2 S)} \right)_{II} = Ne.$$

Последнее отношение, одинаковое для подобных потоков, называется *числом Ньютона* и обозначается  $Ne$ .

### Критерий подобия Эйлера

Вначале рассмотрим наиболее простой случай - напорное движение идеальной жидкости, т. е. такое движение, при котором отсутствуют силы вязкости. Для этого случая уравнение Бернулли для сечений **1-1** и **2-2** будет иметь вид:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Из условия неразрывности потока расходы в сечениях **1-1** и **2-2** с площадями соответственно  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одинаковы, а это значит, что

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2,$$

откуда

$$V_1 = V_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Подставив последнее соотношение в уравнение Бернулли, после переноса членов получим:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{1}{2g} \left( V_2^2 - V_2^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \right).$$

После очевидных преобразований и сокращений придём к виду

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho \frac{V_2^2}{2}} = 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}.$$

Если два потока геометрически подобны, то правая часть уравнения имеет одно и то же значение, следовательно, левая часть тоже одинакова, т.е.

разности давлений в сечениях **1-1** и **2-2** пропорциональны динамическим давлениям:

$$\left( \frac{\Delta P}{\rho V^2} \right)_I = \left( \frac{\Delta P}{\rho V^2} \right)_{II}.$$

Таким образом, при напорном движении идеальной несжимаемой жидкости для обеспечения гидродинамического подобия достаточно одного геометрического подобия. Безразмерная величина, представляющая собой отношение разности давлений к динамическому давлению (или разности пьезометрических высот к скоростной высоте), называется **коэффициентом давления** или **числом Эйлера** и обозначается ***Eu***.

В случае напорного движения в приведённых уравнениях под  $P_1, P_2, \Delta P$  можно понимать полное давление (на жидкость действует также сила тяжести, но в напорных потоках ее действие проявляется через давление, т. е. оно сводится лишь к соответствующему изменению давления за счёт глубины потока), т.к. при высоких давлениях величина давления, зависящая от глубины потока, несоизмеримо мала, и величина гидростатического напора практически полностью определяется избыточным давлением. Следовательно, для ***Eu*** можно записать:

$$Eu = 2 \frac{g(\Delta P)}{\rho g V^2} = 2 \frac{g \Delta H_{cm}}{V^2},$$

где  $\Delta H_{cm}$  - разность статических напоров.

### Критерий подобия Рейнольдса

Посмотрим, какому условию должны удовлетворять те же геометрически и кинематически подобные потоки для того, чтобы было обеспечено их гидродинамическое подобие при наличии сил вязкости, а, следовательно, и потерь энергии, т.е. при каком условии числа ***Eu*** будут одинаковыми для этих потоков.

Уравнение Бернулли для этого случая примет вид:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \xi \frac{V_2^2}{2g},$$

или по аналогии с предыдущими рассуждениями, учтя, что  $V_i = \frac{Q_i}{\omega_i}$ , можно написать

$$\frac{(P_1 - P_2)}{\rho \frac{V_2^2}{2}} = Eu = \alpha_2 - \alpha_1 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \xi.$$

Как видно из последнего уравнения, числа ***Eu*** будут иметь одинаковые значения для рассматриваемых потоков, а сами потоки будут подобны друг другу гидродинамически при условии равенства коэффициентов сопротивления (равенство коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  для сходственных сечений двух потоков следует из их кинематического подобия). Таким образом, коэффициенты сопротивлений  $\xi$  в подобных потоках должны быть одинаковыми, а это значит, что потери напора для сходственных участков пропорциональны скоростным напорам.

$$\left( \frac{h_{1-2}}{V_2^2} \right)_I = \left( \frac{h_{1-2}}{V_2^2} \right)_{II}.$$

Рассмотрим очень важный в гидравлике случай движения жидкости - движение с трением в цилиндрической трубе, для которого коэффициент трения можно описать формулой

$$\xi = \lambda \frac{l}{d}.$$

Для геометрически подобных потоков отношение  $\frac{l}{d}$  одинаково, следовательно, условием гидродинамического подобия в данном случае является одинаковое значение для этих потоков коэффициента  $\lambda$ . Он выражается через напряжение трения  $\tau_0$  на стенке и динамическое давление, как было установлено ранее, следующим образом:

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\rho \frac{V^2}{2}}.$$

Следовательно, для двух подобных потоков I и II можно записать

$$\left( \frac{\tau_0}{\rho V^2} \right)_I = \left( \frac{\tau_0}{\rho V^2} \right)_{II} = k,$$

т. е. напряжения трения пропорциональны динамическим давлениям.

Учитывая закон трения Ньютона и тот факт, что в последних уравнениях  $V = V_{cp}$ , предыдущие отношения, равные ***k***, можно выразить

$$k = \frac{\mu \left( \frac{dV}{dy} \right)_{y=0}}{\rho V_{cp}^2}$$

где индекс  $y = 0$  означает, что производная взята при  $y = 0$ , т. е. у стенки трубы. При этом заметим, что закон трения Ньютона применим лишь при ламинарном течении. Однако, как было показано выше, при турбулентном течении в трубах вблизи стенок образуется тонкий ламинарный слой, внутри которого справедлив закон трения Ньютона. Поэтому напряжение трения  $\tau_0$  на стенке может определяться по этому закону также и при турбулентном течении.

После умножения и деления на диаметр трубы  $d$  и перегруппировки множителей получим:

$$k = \left( \frac{dV}{dy} \right)_{y=0} \frac{d}{V_{cp}} \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{V_{cp} d} = \left[ \frac{d \left( \frac{V}{V_{cp}} \right)}{d \left( \frac{y}{d} \right)} \right]_{y=0} \frac{v}{V_{cp} d} = C \frac{v}{V_{cp} d}.$$

Здесь буквой  $C$  обозначено выражение в квадратных скобках, представляющее собой безразмерный градиент скорости вблизи стенки.

Для кинематически подобных потоков величина  $C$  одинакова, поэтому после сокращения на  $C$  условие динамического подобия потоков перепишем в виде

$$\left( \frac{v}{V_{cp} d} \right)_I = \left( \frac{v}{V_{cp} d} \right)_{II}.$$

или, переходя к обратным величинам

$$\text{Re}_I = \text{Re}_{II}.$$

В этом заключается **критерий подобия Рейнольдса**, который можно сформулировать следующим образом: для гидродинамического подобия геометрически и кинематически подобных потоков с учетом сил вязкости требуется равенство чисел Рейнольдса, подсчитанных для любой пары сходственных сечений этих потоков.

### Критерий подобия Фруда

В тех случаях, когда движение жидкости является безнапорным и происходит под действием разности нивелирных высот, условие подобия потоков описывается иначе, с помощью другого критерия подобия - **числа Фруда**. Этот критерий учитывает пропорциональность в отношениях сил инерции к

силам тяжести. Однако для подавляющего большинства интересующих нас задач в области машиностроения этот критерий не имеет значения и рассматриваться не будет.

### **Заключение о подобии напорных потоков**

Итак, в подобных напорных потоках имеем равенство безразмерных коэффициентов и чисел  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\lambda$ ,  $Eu$ ,  $Re$ ,  $Ne$ . Изменение  $Re$  означает, что меняется соотношение основных сил в потоке, в связи с чем указанные коэффициенты могут также несколько меняться. Поэтому все эти коэффициенты следует рассматривать как функции  $Re$  (хотя в некоторых интервалах  $Re$  они могут оставаться постоянными).

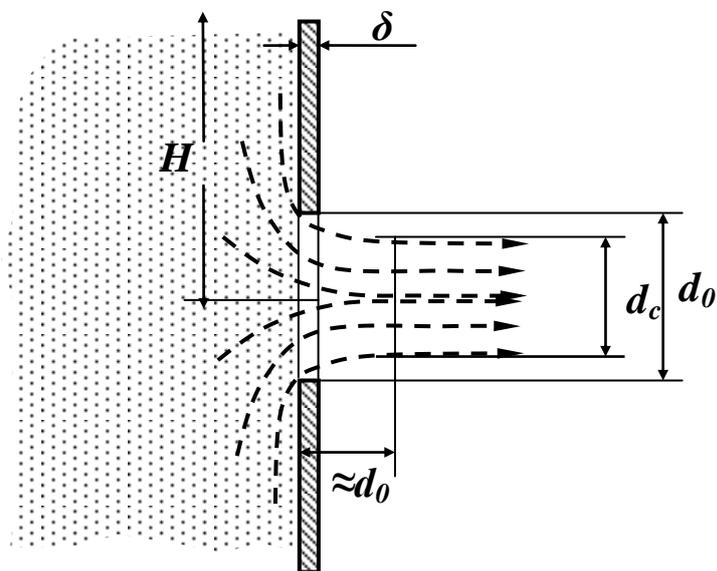
## Лекция 16. Истечение жидкости из отверстий и насадков

Истечение жидкости из отверстий и насадков (коротких трубок различной формы и сечений) характерно тем, что в этом процессе потенциальная энергия жидкости на очень коротком расстоянии и за очень короткое время превращается в кинетическую энергию струи (или капель в общем случае). При этом происходят какие-то, большие или не очень, потери напора. Подобные режимы течения жидкости возникают при вытекании жидкости из резервуаров, баков, котлов в атмосферу или пространство, заполненное жидкостью. Аналогичные явления происходят при протекании жидкости через малые отверстия и щели в направляющей, контрольной и регулирующей аппаратуре различных гидравлических систем.

Основной вопрос, на который нужно найти ответ, состоит в том, как определить расход и скорость истечения через отверстия или насадки различной формы.

### Сжатие струи

При вытекании жидкости из резервуара через отверстие в тонкой стенке, диаметр которого значительно меньше размеров резервуара, а края отверстия имеют прямоугольную форму, диаметр вытекающей струи будет меньше



результирующей скорости движения частиц жидкости становится одинаковым. Изменение направления движения частиц жидкости в силу их инерционности мгновенно произойти не может.

Поэтому сжатие струи обусловлено необходимостью постепенного изменения направления движения жидкости при прохождении отверстия. Так как размеры резервуара много больше размеров отверстия, боковые поверхности и свободная поверхность не могут оказывать влияния на направление входа жидкости в отверстие, то в этом случае наблюдается **совершенное сжатие струи**. Такое сжатие является наибольшим, и оно достигается на расстоянии примерно равном диаметру отверстия. Степень сжатия выражается коэффициентом сжатия  $\epsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega_0} = \left( \frac{d_c}{d_0} \right)^2,$$

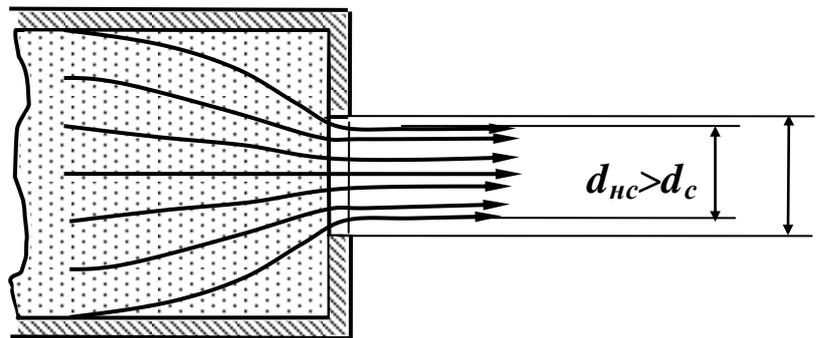
где  $\omega_0, d_0$  - площадь и диаметр отверстия,

$\omega_c, d_c$  - площадь и диаметр совершенно сжатой струи.

В том случае, если истечение происходит из резервуара такой формы, что его стенки влияют на траекторию движения частиц при входе в отверстие, наблюдается *несовершенное сжатие струи*.

Вследствие того, что боковые стенки резервуара перед отверстием формируют направление движения жидкости, струя после отверстия сжимается в меньшей степени,

чем при вытекании из практически бесконечного резервуара. По этой причине меняется коэффициент сжатия струи. Формулы для определения этого сжатия для разных жидкостей и разных условий истечения - эмпирические. Например, для круглого центрального отверстия в тонкой торцевой стенке трубы и для маловязких жидкостей коэффициент сжатия  $\varepsilon_1$  можно находить по следующей эмпирической формуле в долях от коэффициента сжатия  $\varepsilon$  при совершенном сжатии струи



Например, для круглого центрального отверстия в тонкой торцевой стенке трубы и для маловязких жидкостей коэффициент сжатия  $\varepsilon_1$  можно находить по следующей эмпирической формуле в долях от коэффициента сжатия  $\varepsilon$  при совершенном сжатии струи

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = 1 + \frac{0,37}{\varepsilon} n^2;$$

где  $n = \frac{\omega_0}{\omega_{резервуара}};$

где, в свою очередь,  $\omega_0$  - площадь отверстия,

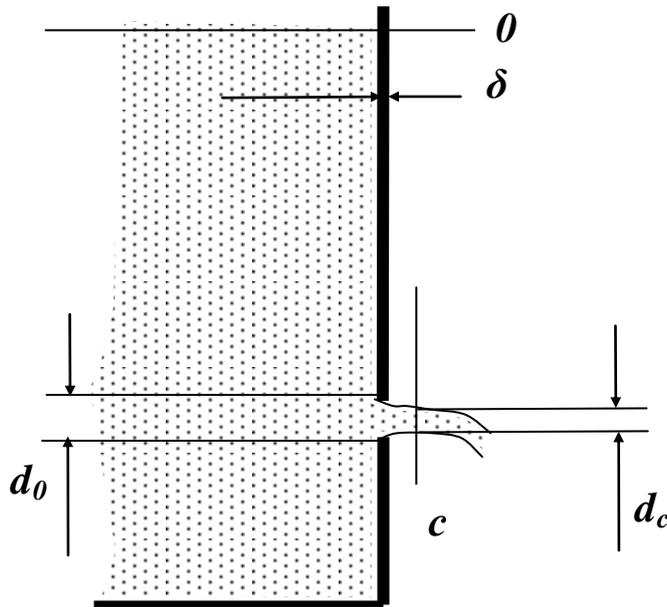
$\omega_{резервуара}$  - площадь сечения резервуара (в приведённом примере площадь поперечного сечения трубы).

## Истечение через малое отверстие в тонкой стенке

Рассмотрим большой резервуар с жидкостью, из которого через малое отверстие в боковой стенке вытекает струйка. Термины «большой резервуар» и «малое отверстие» означает, что эти размеры не сказываются на изменении высоты жидкости (напора) в резервуаре при вытекании из него жидкости. Термин «тонкая стенка» означает, что после сжатия струя вытекающей жидкости не касается цилиндрической поверхности отверстия.

Рассмотрим два сечения в этом резервуаре, обозначенные индексами  $0$  и  $C$ . Запишем уравнение Бернулли для этих условий:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\rho g} + \alpha_c \frac{V_c^2}{2g} + \xi \frac{V_c^2}{2g}.$$



Для описанных условий можно считать, что движения жидкости в сечении  $0$  нет, следовательно, скоростной напор равен нулю. Разницей нивелирных высот, из-за их малого влияния можно пренебречь. Коэффициентом  $\xi$  в данном случае обозначено сопротивление отверстия. Этот коэффициент учитывает потери энергии жидкости на сжатие струи и трение в

струйках жидкости вблизи отверстия при формировании вытекающей струи. С учетом этого уравнение примет вид:

$$\frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \alpha_c \frac{V_c^2}{2g} + \xi \frac{V_c^2}{2g}.$$

После перегруппировки членов получим

$$\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = (\alpha_c + \xi) \frac{V_c^2}{2g}.$$

Выразим отсюда скорость

$$V_c = \sqrt{\frac{p_0 - p_c}{\rho g (\alpha_c + \xi)}} 2g.$$

Заменяем скорость отношением расхода к площади живого сечения потока и вновь перегруппируем

$$Q_c = \omega_c \sqrt{\frac{p_0 - p_c}{\rho g (\alpha_c + \xi)}} 2g = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_c + \xi)}} \omega_c \sqrt{\frac{2g}{\rho g}} (p_0 - p_c).$$

Проанализируем полученное выражение. Заметим, что индекс « $c$ » относится к струе, и это единственный индекс, относящийся к движущейся жидкости «на выходе» рассматриваемого *проходного сечения* (определение

приведено ниже). Опустим этот индекс. Величина  $\frac{1}{\sqrt{(\alpha_c + \xi)}} = \varphi$  - называется **коэффициентом скорости**. Если считать распределение скоростей в струе равномерным ( $\alpha = 1$ ), а жидкость идеальной, в которой нет потерь на трение, то коэффициент  $\xi = 0$ . Тогда коэффициент скорости  $\varphi = 1$ .

Отсюда становится понятным физический смысл коэффициента скорости. Он выражает отношение **действительного расхода** через проходное сечение к **теоретическому расходу**. Действительным расходом называют расход, который на самом деле проходит через проходное сечение. Теоретический расход это такой, который мог бы протекать через проходное сечение при отсутствии потерь. Учтём, что  $\omega_c = \omega_0 \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - коэффициент сжатия струи. После подстановки этих обозначений в коэффициент перед знаком радикала получим  $\frac{1}{\sqrt{(\alpha_c + \xi)}} \omega_c = \varphi \omega_0 \varepsilon$ . Произведение  $\varphi \varepsilon = \mu$  носит название **коэффициент расхода**. Тогда окончательно будем иметь формулу

$$Q = \omega_0 \mu \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta P},$$

или в другой форме, с учётом того, что  $\rho g = \gamma$

$$Q = \omega_0 \mu \sqrt{\frac{2g}{\gamma} \Delta P}.$$

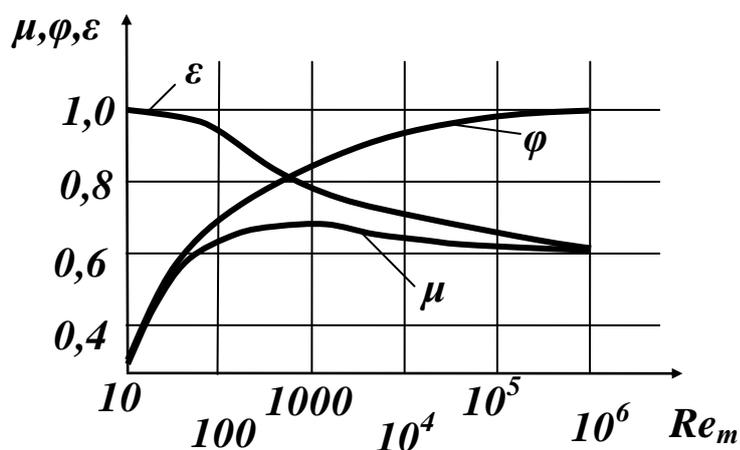
В этих формулах  $\Delta P$  - разность давлений до проходного сечения и после него.

С помощью полученного выражения решается задача определения расхода для всех случаев течения жидкости под действием разности давлений. Кроме того, из данного выражения видно, что причиной течения жидкости является разность давлений. Жидкость всегда движется из области высокого давления область низкого давления. По существу приведённое выражение можно считать **инженерной формой уравнения Бернулли**.

При прохождении жидкости через малое отверстие происходит «смятие» струи. На немецком языке «смятие» - «drosseln». Поэтому в технике истечение через малое отверстие называют дросселированием. Гидравлический аппарат, предназначенный для дросселирования, называется дросселем, а отверстие в этом гидроаппарате называется **проходным сечением**.

Наиболее сложной задачей практического применения этого уравнения является определение коэффициента  $\mu$ , значение которого зависит от степени сжатия струи и режима её течения, структуры распределения скоростей вблизи проходного сечения, которая в свою очередь зависит от формы входа в проходное сечение. Этот коэффициент определён экспериментально. Он,

как и коэффициенты  $\varphi$  и  $\varepsilon$ , зависит от числа Рейнольдса и эти зависимости можно представить с помощью графика.



На графике буквами  $Re_m$  обозначено число Рейнольдса, посчитанное по *теоретической скорости*, соответствующей теоретическому расходу.

С увеличением скорости истечения и связанным с этим увеличением  $Re_m$  коэффициент скорости  $\varphi$  быстро нарастает и при  $Re_m \rightarrow \infty$  стремится к значению  $\varphi = 1,0$ . Это свидетельствует о значительном уменьшении гидравлического сопротивления отверстия за счёт снижения влияния вязкости.

Коэффициент сжатия струи  $\varepsilon$  с увеличением  $Re_m$  уменьшается и при  $Re_m \rightarrow \infty$  стремится к значению  $\varepsilon = 0,6$ .

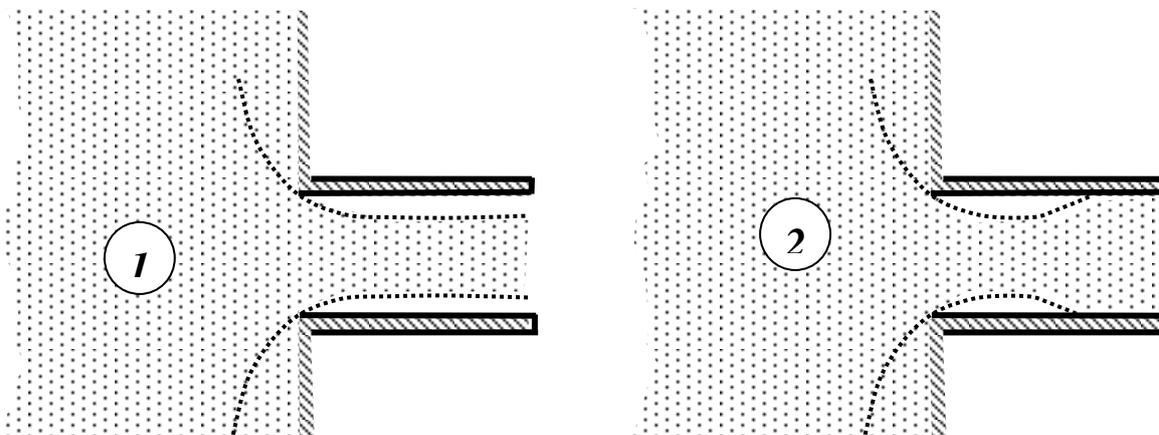
Коэффициент расхода  $\mu$ , являясь произведением коэффициентов  $\varphi$  и  $\varepsilon$ , на первом этапе растёт, достигая максимального значения  $\mu = 0,69$  при  $Re_m \approx 350$ , а затем плавно снижается до  $\mu \approx 0,6$ .

Таким образом, только за счёт коэффициента  $\mu$  величина расхода уменьшается на **30 – 40 %** относительно теоретически возможного.

Таким образом, только за счёт коэффициента  $\mu$  величина расхода уменьшается на **30 – 40 %** относительно теоретически возможного.

## Истечение через насадки

Насадком называется короткая трубка длиной от двух до шести диаметров, присоединённая к выходу отверстия, через которое истекает жидкость. Роль насадка может выполнять и отверстие в толстой стенке, когда диаметр отверстия значительно меньше её толщины. Насадки отличаются



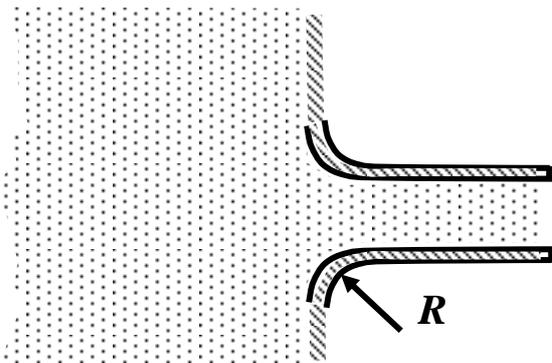
формой и размерами. Наиболее существенные отличия между насадками состоят в форме входного отверстия, которая, как уже отмечалось выше, может

существенно влиять на величину расхода при той же самой площади проходного сечения. Простейшим насадком является *цилиндрический* насадок. Течение в нём может происходить в двух разных режимах. В первом случае на острых входных краях насадка происходит совершенное сжатие струи и далее она движется, не касаясь стенок насадка. В этом случае истечение ничем не отличается от истечения через малое отверстие в тонкой стенке. Скорость при этом истечении высокая, а расход минимален.

Во втором случае, как и при истечении через отверстие в тонкой стенке, струя жидкости вначале сжимается на некотором удалении от входного сечения, образуя вихревую зону, давление в этом сечении струи становится меньше атмосферного. Далее струя постепенно расширяется и заполняет всё сечение насадка. Из-за того, что сжатия на выходе насадка нет ( $\varepsilon = 1,0$ ) а коэффициент расхода через такой насадок равняется

$$\mu = \varphi \approx 0,8 .$$

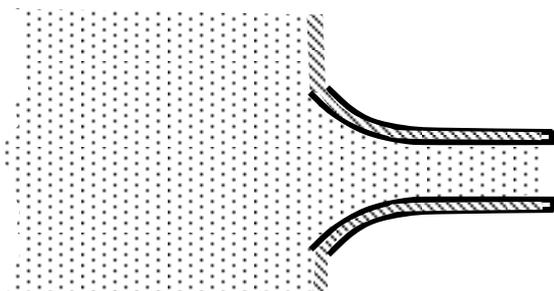
При этом расход жидкости через насадок при прочих равных условиях превышает расход в первом случае, а скорость жидкости становится меньше из-за более высокого сопротивления.



Ещё лучшие условия истечения наблюдаются при движении жидкости через так называемый *тороидальный* насадок, который обеспечивает более высокий коэффициент расхода. Его значение, в зависимости

от увеличения радиуса скругления кромки, доходит до

$$\mu = 0,95 .$$



Когда радиус кривизны становится больше длины насадка, насадок становится *коноидальным*. Коэффициент расхода в таких условиях истечения приближается к значению

$$\mu = 0,98 .$$

## Лекция 17. Гидравлический расчет трубопроводов

Жидкость движется по трубопроводу благодаря тому, что ее энергия в начале трубопровода (у источника гидравлической энергии) больше, чем в конце. Этот перепад (разница) уровней энергии может быть создан тем или иным способом: работой насоса, за счет разности уровней жидкости, давлением газа.

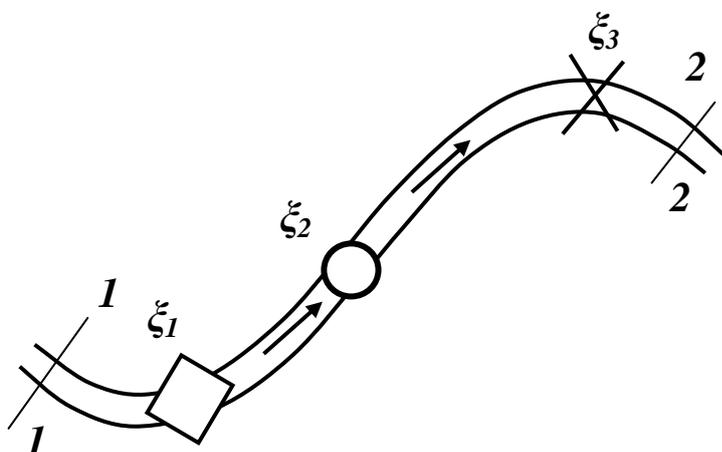
Важнейшей задачей, возникающей при проектировании множества гидросистем различного назначения, является задача определения энергетических характеристик источника гидравлической энергии. К таким системам относятся гидросистемы цехового технологического оборудования, мобильные гидрофицированные машины, системы водоснабжения и отопления и др. Источниками энергии таких гидросистем являются насосные станции, газобаллонные системы, водонапорные башни. Энергетические характеристики источника энергии – подача (расход) и давление – должны быть такими, чтобы обеспечивались необходимые расход и давление на выходе системы – гидродвигателе, водопроводном кране и т.п.

Реже встречается обратная задача, когда при известных энергетических характеристиках источника энергии необходимо узнать, какими будут максимально возможный расход и давление на выходе гидросистемы.

В машиностроении приходится иметь дело чаще всего с такими трубопроводами, движение жидкости в которых создается работой насоса. В гидротехнике и водоснабжении, а также во вспомогательных устройствах течение жидкости происходит, как правило, за счет разности уровней давлений (разности нивелирных высот).

### Простые трубопроводы постоянного сечения

Все трубопроводы могут быть разделены на простые и сложные. К простым трубопроводам относятся трубопроводы без разветвлений, а к сложным – трубопроводы, имеющие хотя бы одно разветвление (или место соединения труб).



Пусть простой трубопровод постоянного сечения расположен произвольно в пространстве, имеет общую длину  $l$  и диаметр  $d$  и содержит ряд местных сопротивлений  $\xi_i$ . В начальном сечении (1—1) имеем нивелирную высоту  $Z_1$  и избыточное давление  $P_1$ , а в конечном (2—2) — соответственно  $Z_2$

и  $P_2$ . Скорость потока в этих сечениях вследствие постоянства диаметра трубы одинакова и равна  $V$ .

Запишем уравнение Бернулли сечений 1—1 и 2—2

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_l \Delta h;$$

В этом выражении  $\sum_l \Delta h$  - суммарные потери на трение по длине и на местных сопротивлениях на участке трубы длиной  $l$ . Потери по длине в соответствии с формулой Дарси будут

$$h_{mp} = \frac{\lambda l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Потери на местных сопротивлениях в соответствии с формулой Вейсбаха составят

$$\Delta h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}.$$

Учитывая уравнение неразрывности потока и постоянство диаметра трубы т. е.  $V_1 = V_2$  и  $\alpha_1 = \alpha_2$ , скоростные напоры в обеих частях можно сократить. Кроме того величины  $Z_1$  и  $Z_2$ , выражающие удельную потенциальную энергию положения, для гидросистем технологического оборудования, как уже не раз отмечалось, много меньше потенциальной энергии сжатия  $\frac{P}{\rho g}$ , и отличаются они между собой очень незначительно. По этой причине в дальнейшем их можно не учитывать. Тогда уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\lambda l}{d} \frac{V^2}{2g} + \sum \xi_m \frac{V^2}{2g}$$

или

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda l}{d} + \sum_l \xi_m \right) V^2.$$

Выразив величину  $V$  через расход  $Q$ :

$$V = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}},$$

и подставив её в предыдущее выражение, получим

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda l}{d} + \sum_l \xi_m \right) \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4}.$$

Введём обозначение

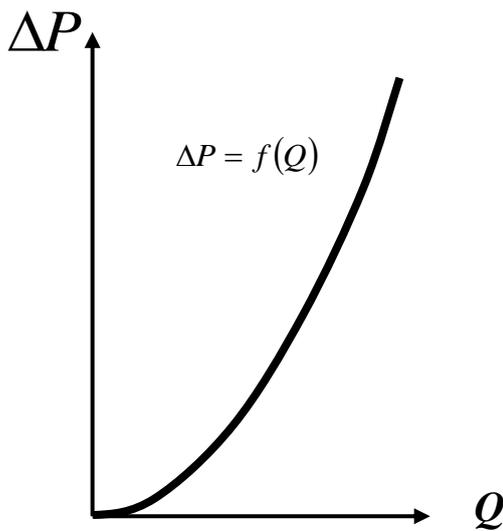
$$k_T = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda l}{d} + \sum_i \xi_{\text{м}} \right) \frac{16}{\pi^2 d^4}.$$

Величину  $k_T$  - будем называть *гидравлическим сопротивлением трубопровода*.

С учётом этого получим

$$\Delta P = k_T Q^2.$$

Последнее выражение называется *характеристикой трубопровода*.



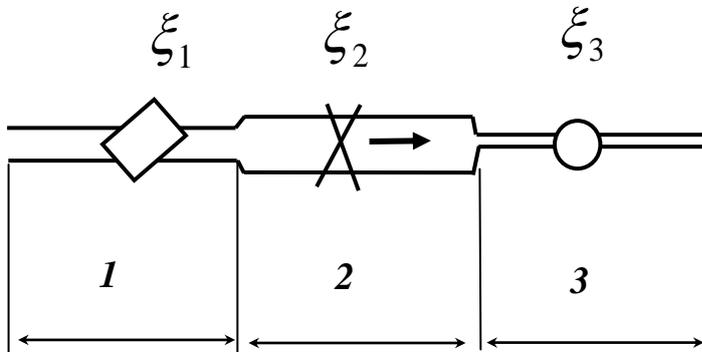
Эта характеристика представляет собой зависимость суммарных потерь давления (напора) от расхода в трубопроводе  $\Delta P = f(Q)$  ( $\Delta h = f(Q)$ ).

Если в трубопроводе установлены гидравлические аппараты, имеющие свои сопротивления, то их необходимо добавить к коэффициенту сопротивления трубопровода, и в результате получится суммарное гидравлическое сопротивление.

## Последовательное соединение трубопроводов

Последовательный трубопровод состоит из нескольких труб различной длины и различного диаметра, соединённых между собой.

В каждом из этих трубопроводов могут иметься свои местные сопротивления. Течение в жидкости в такой трубе подчиняется следующим условиям:



✓ расход на всех участках трубопровода одинаков, т.е.  $Q_1 = Q_2 = Q_3$ ;

✓ потери давления (напора) во всём трубопроводе  $\Delta P$  равны сумме потерь на каждом участке  $\Delta P_i$ :

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3.$$

С учётом сказанного нетрудно

получить уравнение для определения суммарных потерь давления, которое примет вид

$$\Delta P = k_{1T} Q^2 + k_{2T} Q^2 + k_{2T} Q^2 = (k_{1T} + k_{2T} + k_{2T}) Q^2 = k_{\Sigma T} Q^2,$$

где  $k_{1T}$ ,  $k_{2T}$ ,  $k_{2T}$  - гидравлическое сопротивление соответственно первого, второго, и третьего участков трубопровода,

$k_{\Sigma T}$  - суммарное гидравлическое сопротивление всего трубопровода.

Величина суммарного сопротивления с учётом ранее полученной формулы для простых трубопроводов составит.

$$k_{\Sigma T} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \sum_{i_1} \xi_{1,m} \right) \frac{16}{\pi^2 d_1^4} + \frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \sum_{i_2} \xi_{2,m} \right) \frac{16}{\pi^2 d_2^4} +$$

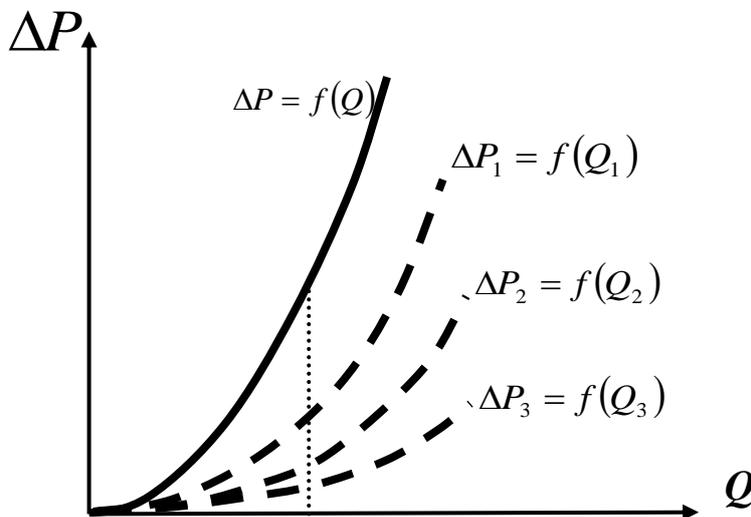
$$\frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda_3 l_3}{d_3} + \sum_{i_3} \xi_{3,m} \right) \frac{16}{\pi^2 d_3^4} =$$

$$\frac{\rho}{2} \frac{16}{\pi^2} \left( \left( \frac{\lambda_1 l_1}{d_1^5} + \frac{\sum_{i_1} \xi_{1,m}}{d_1^4} \right) + \left( \frac{\lambda_2 l_2}{d_2^5} + \frac{\sum_{i_2} \xi_{2,m}}{d_2^4} \right) + \left( \frac{\lambda_3 l_3}{d_3^5} + \frac{\sum_{i_3} \xi_{3,m}}{d_3^4} \right) \right).$$

В общем случае выражение, описывающее суммарное гидравлическое сопротивление сложного трубопровода, будет выглядеть:

$$k_{\Sigma T} = \rho \frac{8}{\pi^2} \sum_i \left( \frac{\lambda_i l_i}{d_i^5} + \frac{\sum_{i_i} \xi_{i,m}}{d_i^4} \right).$$

Полученное уравнение, определяющее суммарные потери давления, представляет собой характеристику сложного трубопровода, которая является суммой характеристик простых трубопроводов.



Это уравнение позволяет узнать, какие энергетические характеристики должен иметь источник энергии, чтобы жидкость могла протекать по всему трубопроводу. Однако в конечной точке этой трубы энергия жидкости будет равна нулю. Если в конце трубы необходимо иметь какое-то

давление  $P_{нагр}$  (например, чтобы преодолеть нагрузку) к величине  $\Delta P$  нужно добавить эту величину. Кроме того, т.к. в общем случае величина ростного напора в начале  $\frac{V_{нач}^2}{2g}$  и в конце  $\frac{V_{кон}^2}{2g}$  трубопровода из-за разных диаметров различны, необходимо добавить и эту разницу к  $\Delta P$ . В результате энергия, которой должен обладать источник, должна составлять

$$\Delta P = k_{\Sigma T} Q^2 + P_{нагр} + \frac{V_{нач}^2 - V_{кон}^2}{2g}.$$

Если переписать это уравнение, заменив скорость жидкости отношением расхода к площади живого сечения  $\frac{Q}{\omega_i}$ , получим:

$$\Delta P = k_{\Sigma T} Q^2 + P_{нагр} + \frac{1}{2g} \left( \frac{Q^2}{\omega_{нач}} - \frac{Q^2}{\omega_{кон}} \right) = k_{\Sigma T} Q^2 + k_V Q^2 + P_{нагр},$$

где коэффициент  $k_V = \frac{1}{2g} \left( \frac{1}{\omega_{нач}} - \frac{1}{\omega_{кон}} \right)$ .

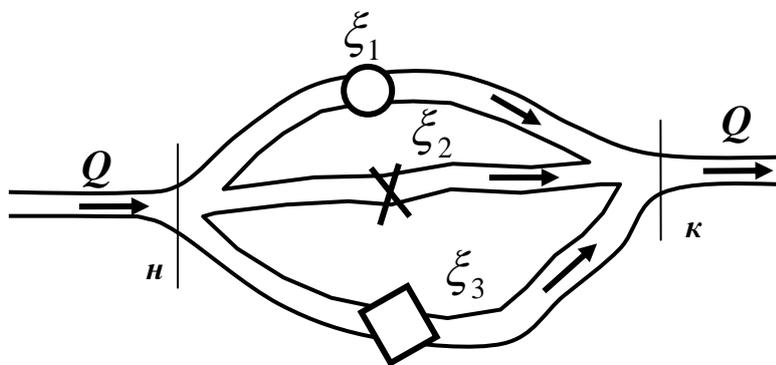
Окончательно характеристику сложного трубопровода можно записать в виде

$$\Delta P = (k_{\Sigma T} + k_V) Q^2 + P_{нагр}.$$

Сумма  $k_{\Sigma T} + k_V$  в этом выражении - общее гидравлическое сопротивление сложного трубопровода.

## Параллельное соединение трубопроводов

Отличительной особенностью таких трубопроводов является то, что поток жидкости делится в одной точке на несколько самостоятельных потоков, которые позже сходятся в другой точке. Каж-



дый из этих потоков может содержать свои местные сопротивления. Наиболее часто возникающей задачей, связанной с расчётом таких трубопроводов, является определение расхода в каждой ветви. Рас-

смотрим движение жидкости по этим трубопроводам, считая, что потенциальная энергия положения  $Z$  много меньше потенциальной энергии сжатия, которая определяется давлением, и ею можно пренебречь. Если считать, что

в местах разветвления и соединения трубопроводов, обозначенных буквами **Н** и **К**, расход  $Q$  одинаков, а давления равны  $P_H$  и  $P_K$ , то можно записать:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

и

$$\Delta P = P_H - P_K = \Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P_3,$$

где **1, 2, 3** – номера параллельных ветвей трубопровода,

$Q_1, Q_2, Q_3$  – расходы в соответствующих ветвях,

$\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3$  – потери давления в соответствующих ветвях.

Представляя каждую из параллельных ветвей как простой трубопровод, можно записать характеристики каждой ветви:

$$\Delta P = k_{1T} Q_1^2, \quad \Delta P = k_{2T} Q_2^2, \quad \Delta P = k_{3T} Q_3^2.$$

На основании этих равенств можно получить уравнения вида:

$$k_{1T} Q_1^2 = k_{2T} Q_2^2, \quad k_{2T} Q_2^2 = k_{3T} Q_3^2 \quad \text{и} \quad k_{1T} Q_1^2 = k_{3T} Q_3^2.$$

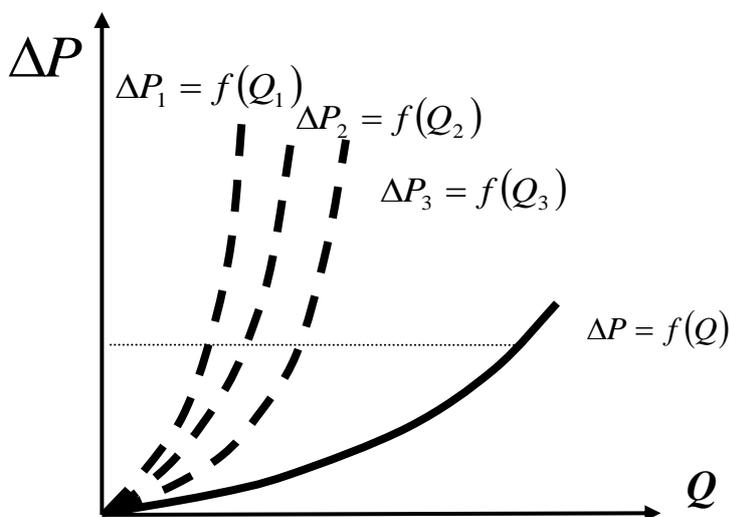
Добавим к этим уравнениям условие равенства расходов в начале и конце разветвлённых трубопроводов и будем иметь:

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ k_{1T} Q_1^2 = k_{2T} Q_2^2 \\ k_{2T} Q_2^2 = k_{3T} Q_3^2 \end{cases}.$$

В итоге получилась система уравнений, из которой при известной подаче жидкости от источника энергии и известных гидравлических сопротивлениях параллельно соединённых трубопроводов можно определить расходы

в каждом из них. Подобную систему уравнений можно записать для любого числа параллельно соединённых труб.

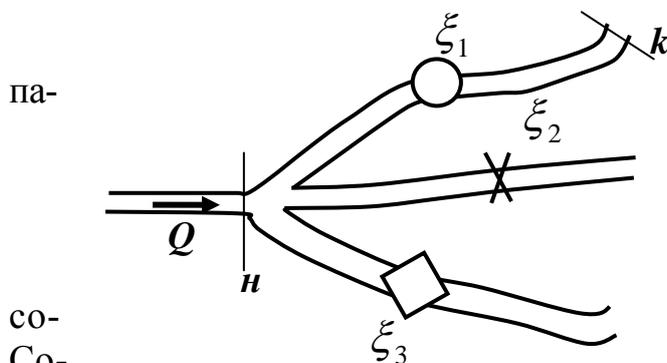
Из приведённых уравнений вытекает следующее важное правило: для построения характеристик параллельного соединения нескольких трубопроводов следует сложить абсциссы (расходы) характеристик ка-



ждого из этих трубопроводов при одинаковых ординатах (потерях давления).

## Разветвлённые трубопроводы

Разветвлённые трубопроводы отличаются тем, что они имеют одну общую точку, из которой расходятся разные потоки, или общую точку, в которой несколько разных потоков сходится. Этот вариант наиболее часто встречается в гидросистемах технологического оборудования, где от одной насосной станции питается сразу несколько одновременно работающих потребителей.



па-  
со-  
Со-  
ли

Для разветвлённых трубопроводов, так же как и для параллельных, можно записать уравнение расходов

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

где  $Q_1, Q_2, Q_3$  - расходы в ответствующих ветвях.

ставим также уравнение Бернулли для любой из ветвей. Будем считать: давление в трубопроводе таково, что нивелирной высотой можно пренебречь. Примем также, что давление в конце каждой ветви (в сечении  $k$ ), необходимое для преодоления нагрузки, равно  $P_{нагр}$ . Уравнение Бернулли для сечений  $n$  и  $k$  будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{P_n}{\rho g} + \alpha_n \frac{V_n^2}{2g} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_k \frac{V_k^2}{2g} + \frac{\Delta P}{\rho g},$$

где  $i$  – индекс, соответствующий определённой ветви.

Если считать, что рассматриваемая система трубопроводов принадлежит гидросистеме технологической машины, в которой давления в различных ветвях, как правило, составляют несколько мегапаскалей, а скорости течения жидкости по трубам чаще всего невысокие (**до 5 м/с**), скоростным напором можно пренебречь. В самом деле, например, при скорости **1 м/с** и коэффициенте кинетической энергии  $\alpha$  равным **2**, величина скоростного напора составит **0,1 м**, что при переводе в единицы давления равно **0,001 МПа**. С учетом этого и после обычных преобразований получим

$$P_n = P_{нагр} + \Delta P.$$

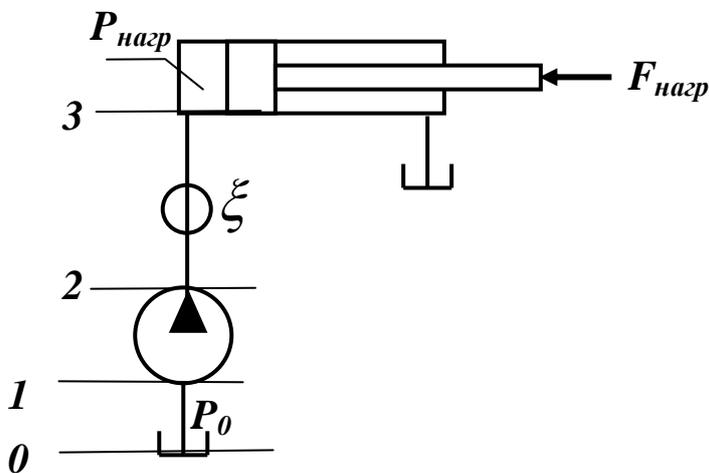
Величина  $\Delta P$ , в данном случае, представляет собой характеристику простого трубопровода и равна  $k_T Q^2$ . Таким образом, для каждой ветви разветвлённого трубопровода можно написать подобное уравнение. Если добавить к ним уравнение расходов, то можно получить систему уравнений вида

$$\begin{cases} P_n = P_{нагр} + k_{1T} Q_1^2 \\ P_n = P_{2нагр} + k_{2T} Q_2^2 \\ P_n = P_{3нагр} + k_{3T} Q_3^2 \\ Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \end{cases}$$

Подобную систему уравнений можно записать для любого числа ветвей разветвлённого трубопровода. Решая её, можно определить, какой расход и какое давление должен обеспечивать источник гидравлической энергии, чтобы на выходе трубопроводов получалось заданное давление при заданном расходе.

### Трубопроводы с насосной подачей жидкости

В большинстве гидравлических систем технологического оборудования в качестве источника энергии используются насосы различного принципа действия. Важнейшей задачей, которая возникает при проектировании каждой гидросистемы, является согласование работы насосной станции и системы трубопроводов, гидроаппаратов и гидромашин, входящих в её состав. Это многообразные и сложные задачи, которые подробно рассматриваются в курсах, связанных с изучением гидропривода. Здесь мы познакомимся лишь с общим принципом таких расчётов.



Для этого рассмотрим наиболее простой случай трубопровода, по которому насос перекачивает жидкость из гидробака в ёмкость или полость с заданными величинами давления и расхода. К таким ёмкостям можно отнести, например, гидроцилиндр. Нивелирными высотами, как и в предыдущих случаях, пренебрежём из-за их ма-

лости.

Запишем сначала уравнение Бернулли для сечений 2 и 3

$$\frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g},$$

где  $\Delta P_{2-3}$  - суммарные потери давления в напорном трубопроводе (характеристика напорного трубопровода).

Теперь запишем уравнение Бернулли для сечений 0 и 1

$$\frac{P_0}{\rho g} = \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g},$$

где  $\Delta P_0$  - атмосферное давление,

$\Delta P_{0-1}$  - суммарные потери давления во всасывающем трубопроводе (характеристика всасывающего трубопровода).

Из второго уравнения определим общий напор (энергию), которым обладает жидкость при входе в насос. Тогда второе уравнение примет вид

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_0}{\rho g} - \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g}.$$

В процессе своей работы насос передаёт жидкости дополнительную энергию  $H_{насоса}$ , в результате чего общий напор жидкости в сечении 2 становится равным:

$$\frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g},$$

т.е. можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + H_{насоса} &= \frac{P_0}{\rho g} - \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g} + H_{насоса} = \\ \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} &= \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g} \end{aligned}$$

Выделим из полученного равенства величину  $H_{насоса}$ :

$$H_{насоса} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g} - \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g}.$$

Перегруппируем члены в этом выражении:

$$\begin{aligned} H_{насоса} &= \left( \frac{P_{нагр}}{\rho g} - \frac{P_0}{\rho g} \right) + \left( \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} \right) + \left( \frac{\Delta P_{2-3}}{\rho g} + \frac{\Delta P_{0-1}}{\rho g} \right) = \\ &= \left( \frac{P_{нагр} - P_0}{\rho g} \right) + \left( \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} \right) + \left( \frac{\Delta P_{0-1} + \Delta P_{2-3}}{\rho g} \right) \end{aligned}$$

Если принять, что:

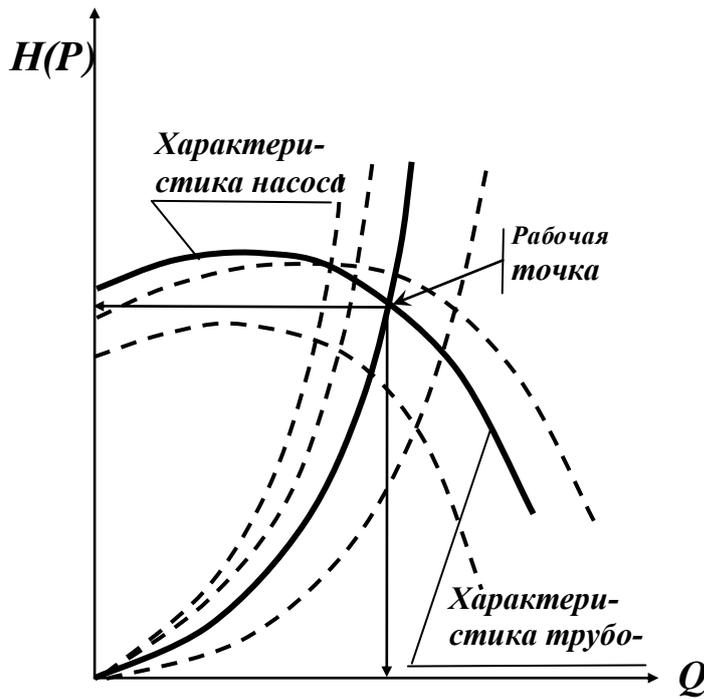
- в первом слагаемом атмосферное давление  $P_0$  равно 0,
- второе слагаемое (скоростной напор на выходе из напорного трубопровода) можно переписать через расход и представить в

виде  $k_c Q^2$ , где  $k_c = \alpha \frac{1}{\omega^2 2g}$  можно считать коэффициентом

том скоростного напора (в этом выражении  $\omega$  – площадь сечения трубопровода),

- третье слагаемое можно представить в виде суммарной характеристики всасывающего и напорного трубопровода, то последнее выражение примет вид:

$$H_{насоса} = \frac{P_{нагр}}{\rho g} + k_c Q^2 + k_{\Sigma T} Q^2.$$



Последнее выражение представляет собой **рабочую характеристику насоса**.

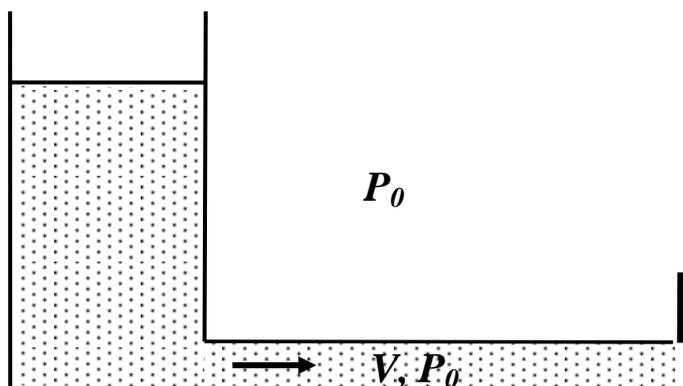
Построив характеристику трубопровода  $\Delta P = k_T Q^2$  и характеристику насоса можно найти так называемую **рабочую точку**, как точку пересечения характеристик насоса и трубопровода. Это означает, что при соответствующих этой точке давлении и расходе, будет обеспечиваться работа насоса с требуемыми характеристиками. Чтобы получить другую рабочую точку нужно или изменить рабочую характеристику насоса или характеристику трубопровода.

Это можно сделать различными способами, например, изменив сопротивление трубопровода или режим работы насоса.

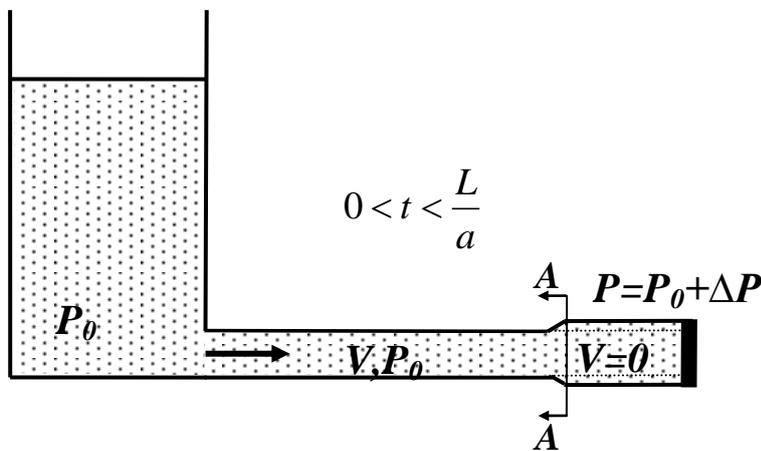
## Лекция 18. Гидравлический удар в трубопроводах

Теоретическое и экспериментальное исследование *гидравлического удара* в трубопроводах впервые было проведено известным русским учёным *Николаем Егоровичем Жуковским* в 1899 году. Это явление связано с тем, что при быстром закрытии трубопровода, по которому течёт жидкость, или быстром его открытии (т.е. соединении тупикового трубопровода с источником гидравлической энергии) возникает резкое, неодновременное по длине трубопровода изменение скорости и давления жидкости. Если в таком трубопроводе измерять скорость жидкости и давление, то обнаружится, что скорость меняется как по величине, так и по направлению, а давление - как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения по отношению к начальному. Это означает, что в трубопроводе возникает колебательный процесс, характеризующийся периодическим повышением и понижением давления. Такой процесс очень быстротечен и обусловлен упругими деформациями стенок трубы и самой жидкости.

Подробно рассмотрим его картину для случая *полного и прямого* гидравлического удара.

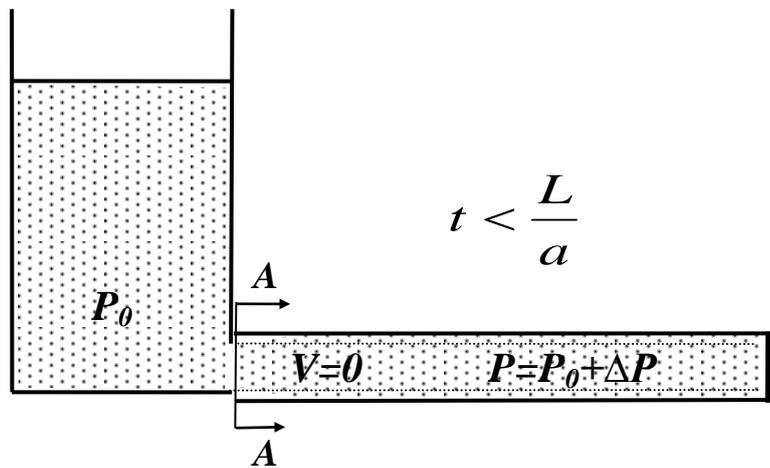


Будем считать, что в исходном состоянии трубопровод открыт. Жидкость движется по трубе со скоростью  $V > 0$ . Давление в жидкости равно  $P_0$ .

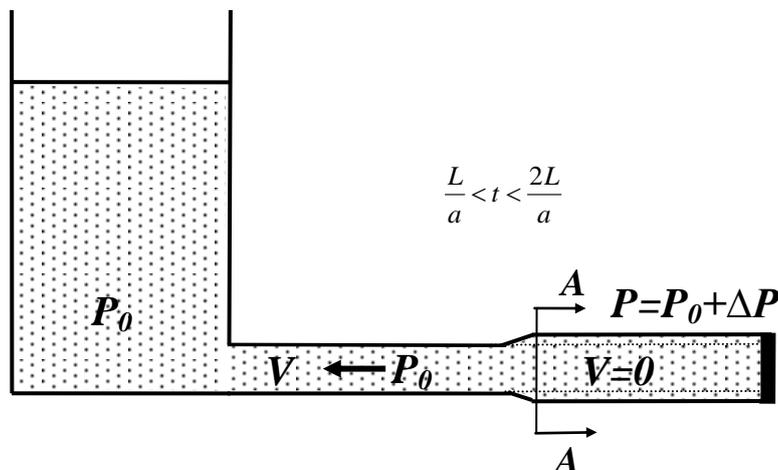


Трубопровод мгновенно закрывается. Слои жидкости, натолкнувшись на заслонку крана, останавливаются. Кинетическая энергия жидкости переходит в деформацию стенок трубы (труба у заслонки расширится), и жидкости (давление у заслонки повысится на величину  $\Delta P$ ). На остановившиеся у заслонки слои жидкости будут набегать следующие, вызывая сжатие жидкости и рост давления, который будет с некоторой скоростью распространяться в сторону противоположную направлению скорости движения жидкости. Переходная область в сечении **A-A** называется ударной волной. Скорость перемещения сечения **A-A** (**фронта волны**) называется скоростью распространения ударной волны и обозначается буквой **a**. Такой процесс проходит в период времени  $0 < t < \frac{L}{a}$ .

В момент времени  $t < \frac{L}{a}$  весь трубопровод окажется расширенным, а жид-



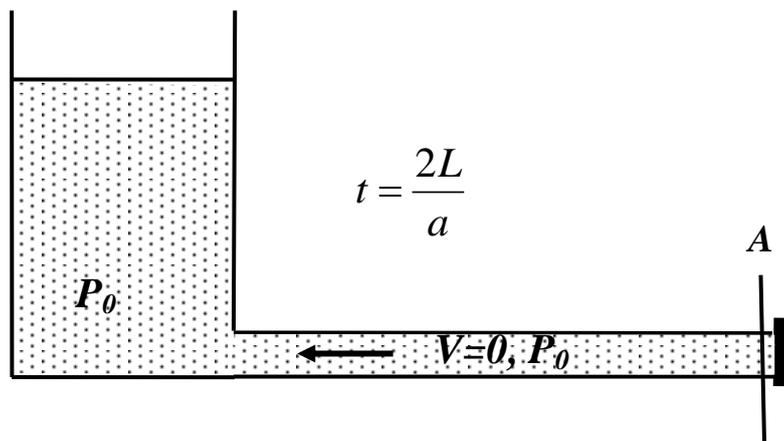
кость сжатой и неподвижной. Но такое состояние неравновесное. Поскольку у источника давление  $P_0$ , а в трубе  $P = P_0 + \Delta P$ , то жидкость начнёт двигаться в сторону меньшего давления, т.е. из трубы в резервуар.



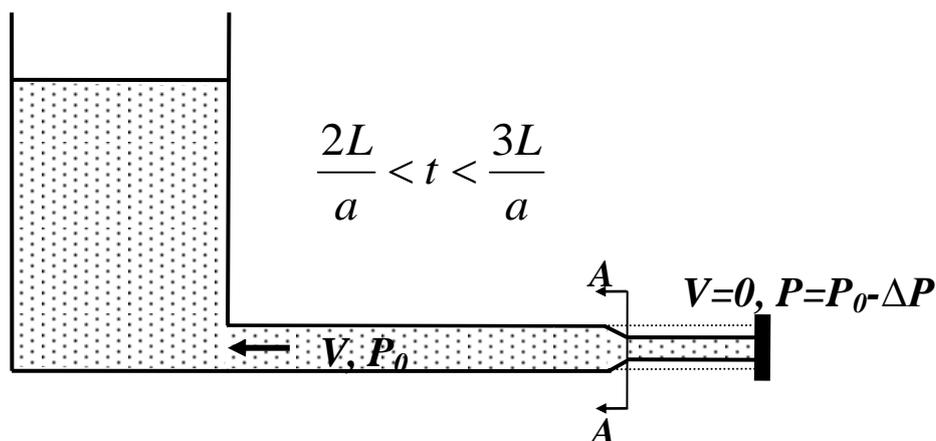
Этот процесс начинается от начала трубы. Жидкость будет вытекать из трубы в резервуар с некоторой скоростью  $V$ . Сечение **A-A**

(ударная волна) начнёт перемещаться к концу трубы со скоростью  $a$ . При этом давление в трубе будет снижаться до  $P_0$ .

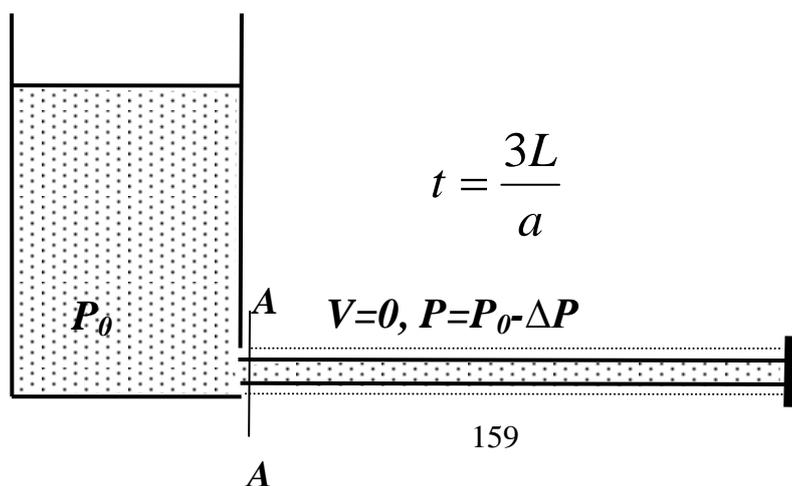
Этот процесс будет происходить в период времени  $\frac{L}{a} < t < \frac{2L}{a}$ .



Энергия деформации жидкости переходит в кинетическую энергию, и жидкость приобретает некоторую скорость  $V$ , но направленную в обратную сторону. Во всём трубопроводе устанавливается давление  $P_0$ . По инерции жидкость продолжает двигаться к началу трубы и начинает испытывать деформации растяжения, что приводит к уменьшению давления вблизи заслонки.

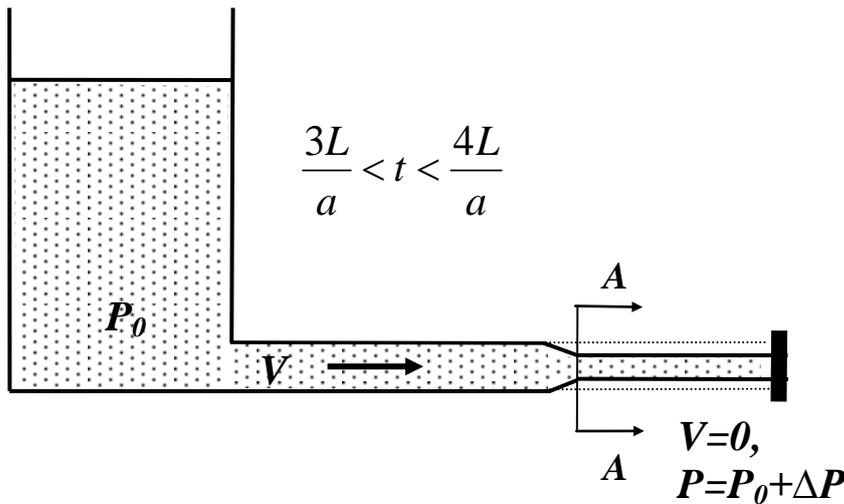


Возникает отрицательная ударная волна, движущаяся от конца трубы к началу со скоростью  $a$ , и за фронтом волны остается сжатая труба. Кинетическая энергия снова превращается в энергию деформации (сжатия).

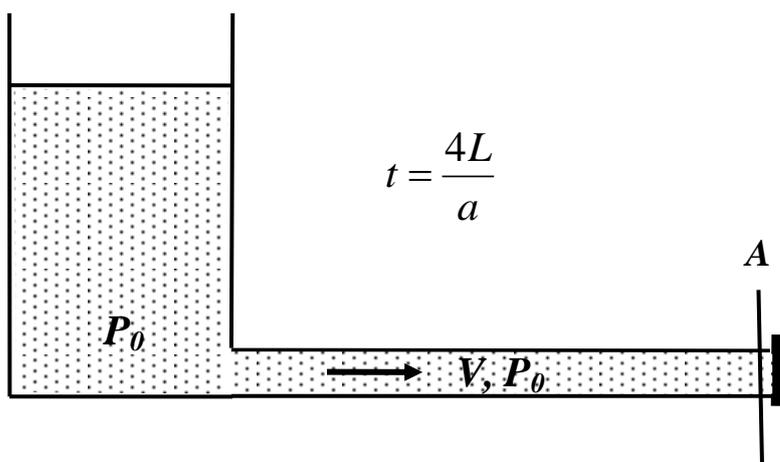


В момент времени  $t = \frac{3L}{a}$  вся труба окажется сжатой, а волна достигает начала трубы. Давление вблизи источника выше, чем во фронте. Из-за этого слои жидкости под действием перепада давления начинают двигаться к концу трубы (к заслонке) с некоторой скоростью  $V > 0$ , а давление поднимается до  $P_0$ .

Поэтому период времени  $\frac{3L}{a} < t < \frac{4L}{a}$  происходит процесс выравнивания давления в трубопроводе. При этом происходит движение ударной волны со скоростью  $a$  от начала трубы к её концу.



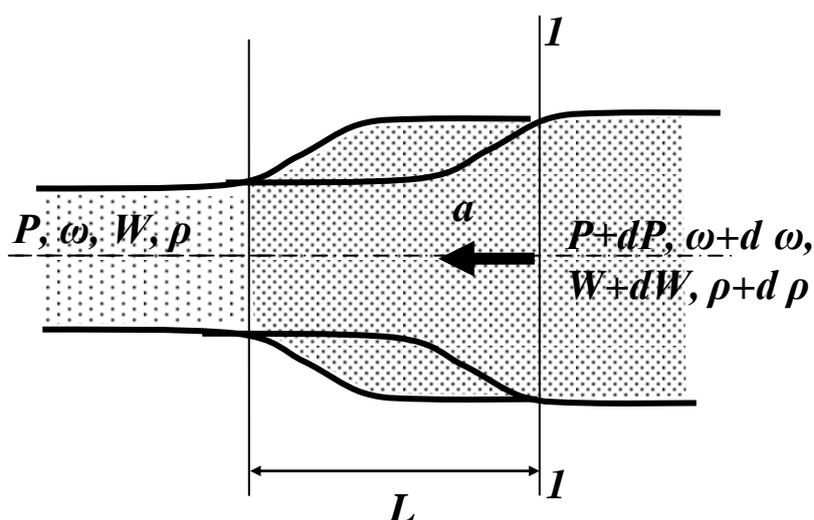
В момент времени  $t = \frac{4L}{a}$  ударная волна достигает конца трубы.



Далее весь процесс начинается сначала. При исследовании этого процесса возникает три основных вопроса. Первый - какова скорость протекания этого колебательного процесса и от чего она зависит? Второй вопрос - как сильно меняется давление в трубопроводе за счёт описанного процесса? И третий - как долго может протекать этот процесс?

## Скорость распространения гидравлической ударной волны в трубопроводе

Изменения давления и скорости потока в трубопроводах происходят не мгновенно в связи с упругостью твёрдых стенок трубы и сжимаемостью рабочей среды, а с некоторой конечной скоростью, обусловленной необходимостью компенсации упругих деформаций жидкости и трубы. Рассмотрим случай когда в трубопроводе длиной  $L$  и площадью сечения  $\omega$  под давлением  $P$  находится жидкость, плотность которой  $\rho$ .



Предположим, что в момент времени  $t$  в сечении  $I - I$  давление повысится на величину  $dp$ . Это повышение вызывает

увеличение плотности на величину  $d\rho$ , а также расширение внутреннего диаметра трубы. Следовательно, площадь проходного сечения увеличится на величину  $d\omega$ . В результате увеличится объём  $W$  участка трубы на величину  $dW$ . За счёт этого произойдет увеличение массы жидкости находящейся в трубе на участке длиной  $L$ . Масса увеличится за счёт увеличения, во-первых, плотности жидкости, во-вторых, за счёт увеличения объёма  $W$ .

Такая ситуация рассматривалась при выводе уравнения неразрывности потока в дифференциальной форме, с той только разницей, что там рассматривалось лишь изменение массы во времени, без учёта вызвавших это изменение причин  $\frac{dM}{dt} = W \frac{d\rho}{dt} + \frac{dW}{dt} \rho$ . По аналогии с приведённым уравнением запишем выражение, описывающее изменение массы за счёт изменения давления

$$\frac{dM}{dP} = W \frac{d\rho}{dP} + \frac{dW}{dP} \rho = 0 .$$

Жидкость под действием указанного повышения давления устремится с некоторой скоростью  $a$  в слои с меньшим давлением, в которых также будет повышаться плотность и увеличиваться напряжение в стенках трубопровода, способствующее увеличению площади трубопровода. В связи с этим потребуется некоторое время на распространение этих деформаций вдоль трубопровода.

С другой стороны, перемещение массы  $dm$  за время  $dt$  происходит под влиянием результирующей  $F_p$  сил давления, действующих вдоль линии движения на торцовые поверхности цилиндрического объёма длиной  $L$

$$F_p = \omega(P + \Delta P) - \omega P$$

В этом случае уравнение импульса силы может быть представлено в следующем виде

$$\omega dP dt = dma .$$

Отсюда

$$\frac{dm}{dP} = \frac{\omega dt}{a} .$$

Имея в виду, что  $dt = \frac{L}{a}$ , и подставив это в предыдущее выражение, получим

$$\frac{dm}{dP} = \frac{\omega L}{a^2} .$$

Заметим, что произведение

$$\omega L = W .$$

Приравняем оба выражения для  $\frac{dm}{dP}$  и получим:

$$\frac{W}{a^2} = W \frac{d\rho}{dP} + \rho \frac{dW}{dP} .$$

Выразим из последнего равенства величину  $a^2$

$$a^2 = \frac{W}{W \frac{d\rho}{dP} + \rho \frac{dW}{dP}} .$$

Разделим числитель и знаменатель на  $W$ , а первое слагаемое в знаменателе искусственно умножим и разделим на  $\rho$ :

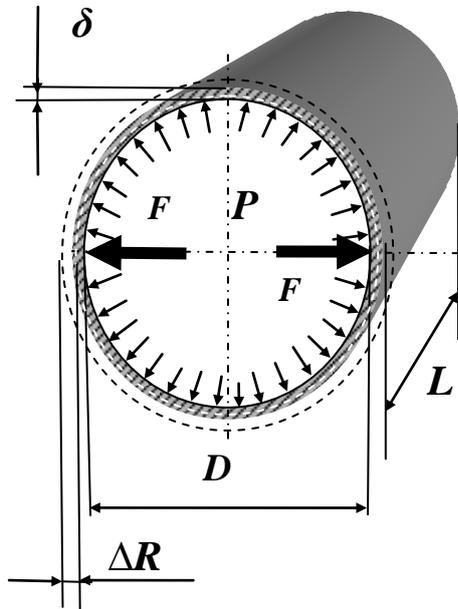
$$a^2 = \frac{1}{\rho \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} + \rho \frac{1}{W} \frac{dW}{dP}} .$$

Обратим внимание на то, что  $W = \omega L$  а  $dW = d\omega L$ . После подстановки этих равенств в последнее выражение и извлечения корня получим выражение для скорости распространения ударной волны, которая, по сути, является скоростью распространения упругих деформаций жидкости в трубе.

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} + \frac{1}{\omega L} \frac{d\omega L}{dP} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} + \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dP} \right)}}.$$

Здесь первое слагаемое под корнем характеризует упругие свойства рабочей среды (жидкости), а – второе упругие силы материала трубы.

Рассмотрим подробнее эти слагаемые.



Как известно из гидростатики, сила, действующая на цилиндрическую поверхность, равна произведению давления на проекцию площади этой поверхности в направлении действия силы. На рассматриваемый участок трубы с толщиной стенок  $\delta$ , длиной  $L$  и диаметром  $D$  действует изнутри давление  $P$ . Вследствие этого возникает разрывающая сила  $F$ , равная

$$F = PDL.$$

В стенках трубы возникает сила сопротивления  $F_c$ , равная произведению площади сечения стенок трубы  $2(\delta L)$  на внутренние напряжения  $\sigma_m$  в материале стенок трубы, т.е.

$$F_c = 2(\delta L)\sigma_m.$$

Если приравнять две эти силы, получим равенство

$$\sigma_m 2(\delta L) = PDL,$$

из которого найдём выражение, определяющее внутреннее напряжение в стенках трубы  $\sigma_m$ :

$$\sigma_m = \frac{PD}{2\delta}.$$

Полагая, что относительное увеличение диаметра трубы, равно  $\frac{2\Delta R}{D}$ , прямо пропорционально напряжению в стенках трубы, можно записать

$$\sigma_m = E_m \frac{2\Delta R}{D},$$

где  $E_m$  - коэффициент пропорциональности, который является модулем упругости материала трубы.

Из двух последних выражений следует, что абсолютное приращение радиуса сечения трубы может быть выражено формулой

$$\Delta R = \frac{D\sigma}{2E_m} = \frac{D}{2E_m} \frac{PD}{2\delta} = \frac{D^2}{4E_m\delta} P.$$

Запишем выражение, определяющее увеличение площади сечения трубы:

$$\begin{aligned} \omega - \omega_p &= \pi \left( \frac{D}{2} + \Delta R \right)^2 - \pi \frac{D^2}{4} = \pi \frac{D^2}{4} - 2\pi \frac{D}{2} \Delta R \\ &+ \pi \Delta R^2 - \pi \frac{D^2}{4} = \pi D \Delta R + \pi \Delta R^2. \end{aligned}$$

где  $\omega$  – начальная площадь сечения трубы,

$\omega_p$  – площадь сечения трубы при давлении  $P$ .

Пренебрегая малой величиной высшего порядка  $\Delta R^2$  и подставив выражение для  $\Delta R$ , получим

$$\omega - \omega_p = \pi D \frac{D^2}{4E_m\delta} P = \frac{\pi D^3}{4E_m\delta} P.$$

Продифференцировав это выражение по  $P$  и рассматривая  $\omega$  как функцию, зависящую от  $P$ , получим:

$$\frac{d\omega}{dP} = \frac{\pi D^3}{4E_m\delta}.$$

В итоге слагаемое, описывающее упругие свойства материала трубы в выражении для скорости распространения ударной волны, можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dP} = \frac{1}{\pi \frac{D^2}{4}} \frac{\pi D^3}{4E_m\delta} = \frac{D}{E_m\delta}.$$

Теперь рассмотрим слагаемое, описывающее упругость жидкости  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$ . Ранее при рассмотрении свойств жидкости было установлено, что если изменение объёма происходит за счёт изменения плотности, то можно определить коэффициент сжимаемости жидкости  $\beta_w$ :

$$\beta_w = \frac{\frac{M}{d\rho}}{\frac{M}{\rho}} \frac{1}{dP} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{dP}.$$

Часто этот коэффициент выражают через обратную величину, называемую модулем упругости жидкости  $E_{ж}$ , т. е.:

$$\beta_w = \frac{1}{E_{жс}}$$

Отсюда следует, что второе слагаемое, характеризующее упругие свойства рабочей среды, может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{d\rho}{d\rho} = \frac{1}{E_{жс}}$$

Таким образом, окончательно выражение для скорости распространения ударной волны в упругом трубопроводе можно переписать в следующем виде:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{D}{E_m \delta} + \frac{1}{E_{жс}} \right)}} = \frac{\sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D E_{жс}}{E_m \delta}}},$$

где  $\rho$  - плотность жидкости,

$D$  - диаметр трубопровода,

$\delta$  - толщина стенки трубопровода,

$E_m$  - объёмный модуль упругости материала трубы,

$E_{жс}$  - объёмный модуль упругости жидкости.

Из формулы следует, что скорость распространения ударной волны зависит от сжимаемости жидкости и упругих деформаций материала трубопровода.

## Ударное давление

Для выяснения величины подъёма давления  $\Delta P$  применим теорему о сохранении количества движения (импульса силы). Для этого рассмотрим элементарное перемещение участка жидкости длиной  $dL$  за время  $dt$ . Учтём, что при прямом гидроударе кинетическая энергия ударной волны полностью превращается в потенциальную, т.е. скорость жидкости  $V$  становится равной нулю  $0$ .

Импульс силы, под действием которого происходит это движение, равен:

$$(\omega(P + \Delta P) - \omega P) dt = \omega \Delta P dt.$$

Изменение количества движения рассматриваемого объёма длиной  $dL$  будет:

$$(\omega dL \rho V) - (\omega dL \rho 0) = \omega dL \rho V,$$

Повторимся: скорость во второй скобке равна  $\theta$ , т.к. рассматриваемый объём жидкости останавливается.

Приравнявая эти выражения по теореме о сохранении количества движения, получим:

$$\omega \Delta P dt = \omega dL \rho V .$$

Отсюда выразим величину повышения давления  $\Delta P$ :

$$\Delta P = \rho V \frac{dL}{dt} .$$

После замены дроби скоростью  $a$ , окончательно будем иметь:

$$\Delta P = \rho V a ,$$

где  $V$  - скорость жидкости в трубопроводе до возникновения гидроудара,

$\rho$  - плотность жидкости,

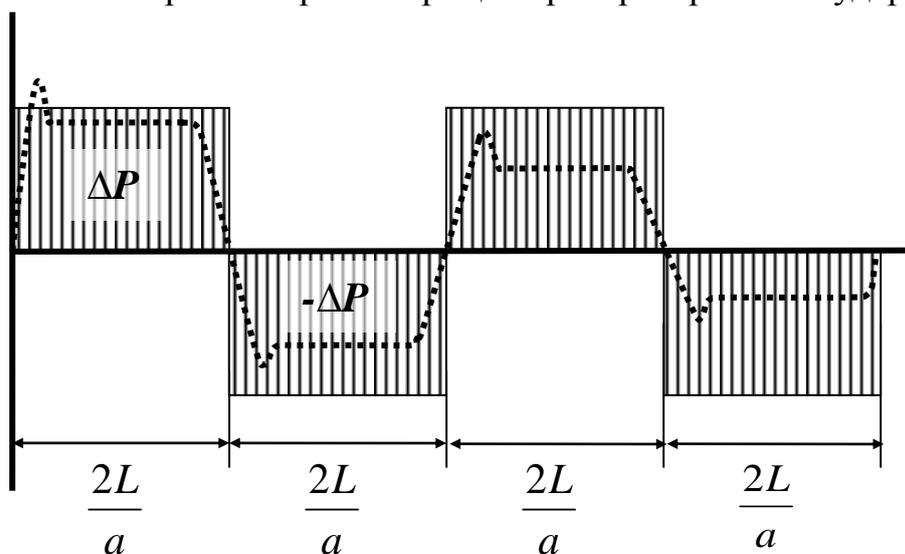
$a$  - скорость распространения ударной волны.

Если в эту формулу подставить выражение описывающее  $a$ , то придём к формуле, носящей имя Жуковского:

$$\Delta P = \rho V \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{D}{E_m \delta} + \frac{1}{E_{жс}} \right)}} .$$

## Протекание гидравлического удара во времени

Рассмотренный ранее процесс распространения ударной волны в тру-



бопроводе не происходит бесконечно долго. В опытах Жуковского было за-

регистрировано по **12** полным циклов. При этом величина ударного давления  $\Delta P$  постепенно уменьшалась.

Уменьшение давления вызвано трением в трубе и рассеиванием энергии в резервуаре, обеспечивающем исходный напор. На графике сплошной заштрихованной областью показано теоретическое изменение давления при гидроударе. Прерывистой линией показан примерный вид действительной картины изменения давления.

## Разновидности гидроудара

Если трубопровод перекрыть не полностью, то скорость жидкости изменится не до нуля, а до значения  $V_1$ . В этом случае может возникнуть **неполный гидроудар**, при котором величина повышения давления (ударное давление) будет меньше, чем в первом случае, а формула Жуковского примет вид

$$\Delta P = \rho(V - V_1)a.$$

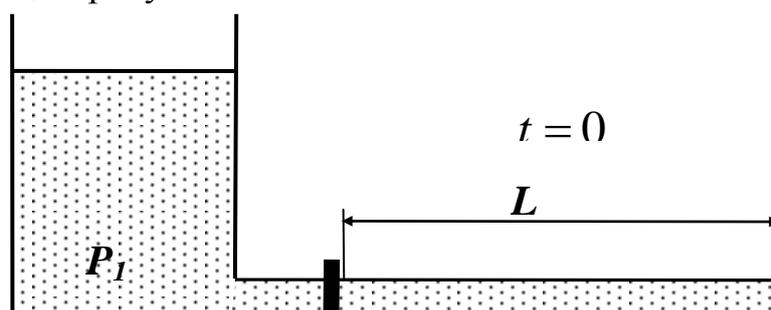
Приведённые формулы справедливы только в том случае, если время закрытия крана  $t_{зак}$  меньше фазы гидравлического удара  $\frac{2L}{a}$ , т.е.

$$t_{зак} < \frac{2L}{a}.$$

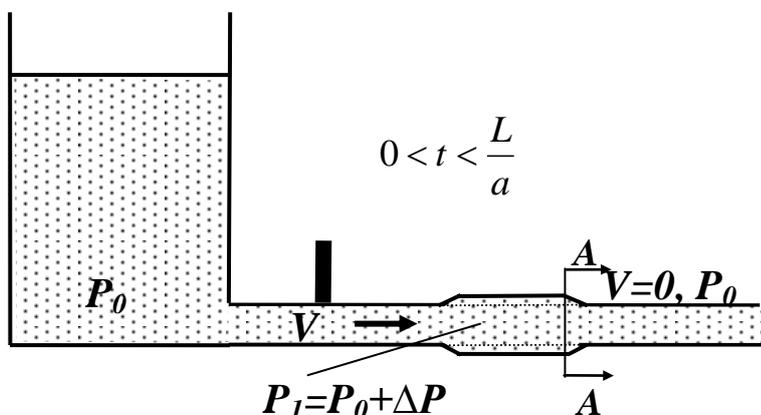
В том случае, если  $t_{зак} > \frac{2L}{a}$ , возникает **непрямой гидроудар**. Для него характерно то, что отразившаяся от резервуара в начале трубы ударная волна возвращается к заслонке крана раньше, чем он будет полностью закрыт. Величина  $\Delta P$  в этом случае будет меньше, чем при прямом гидроударе. Её приближенно (считая, что изменение  $P$  в трубопроводе происходит по линейному закону) можно определить по формуле:

$$\Delta P = \rho V \left( \frac{2L}{t_{зак}} \right).$$

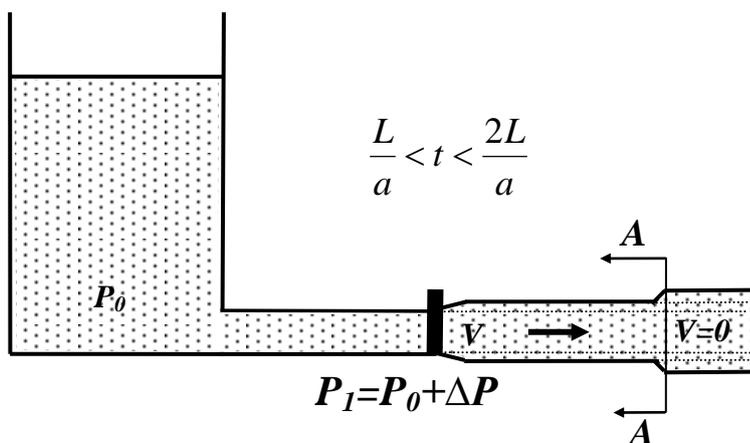
В гидроприводах технологических машин, станков и т.п. очень часто возникает так называемый **гидроудар в тупиковом трубопроводе**. В этом случае возможно увеличение ударного давления в два раза. Пояснить это можно следующим рисунком.



Трубопровод с низким начальным давлением отделён от источника гидравлической энергии высокого давления. При мгновенном (в реальных гидросистемах  $0,008 - 0,001c$ ) открытии заслонки крана давление в начале трубопровода внезапно возрастает на величину  $\Delta P = P_1 - P_0$ .



Возникает волна повышенного давления, которая движется к концу трубопровода со скоростью  $a$ . Скорость же движения жидкости становится равной  $V = \frac{\Delta P}{\rho a}$ , а давление отличается от  $P_0$  на величину  $\Delta P$ . В момент



времени  $t = \frac{L}{a}$  волна достигнет тупика, и вся труба окажется расширенной.

Т.к. дальнейшее движение жидкости невозможно, то передние её слои остановятся, а последующие по инерции будут набегать на них. Это вызовет дополнительное повышение давления в конце трубы на величину  $\Delta P$ . Возникнет вторая, отражённая волна, которая движется к началу трубопровода со скоростью  $a$ . Давление за фронтом ударной волны становится  $P_2 = P_0 + 2\Delta P$ , а скорость жидкости  $V=0$ .

Далее весь процесс продолжается как в случае полного гидроудара, но колебания давления происходят относительно величины  $P_1 = P_0 + \Delta P$ , а не относительно  $P_0$ .

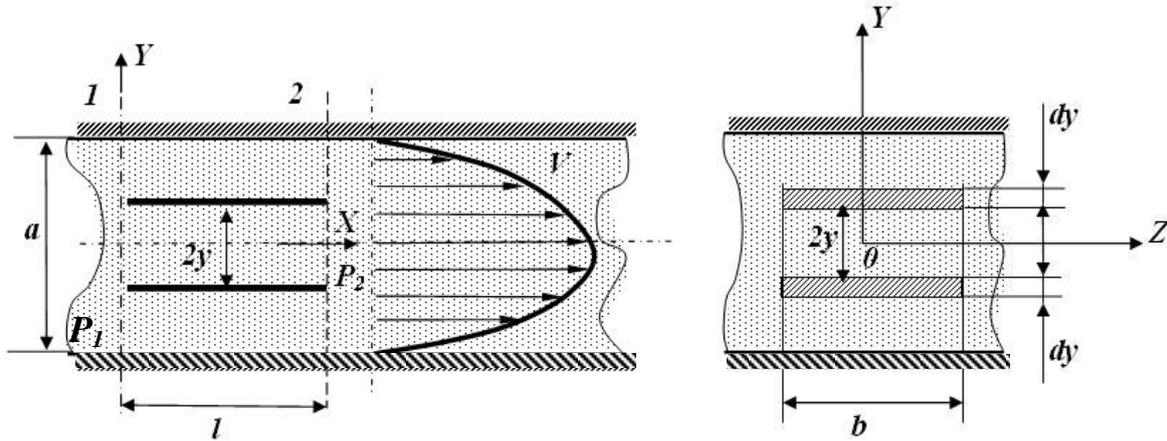
## Лекция 19. Особые случаи ламинарного течения

### Ламинарное течение в зазорах

#### Ламинарное течение в плоских зазорах

Рассмотренные выше зависимости, как уже отмечалось, действительны для труб круглого сечения, но они нуждаются в уточнении, если форма сечения потока отличается от окружности. Такие потоки имеют место в каналах и проходных щелях гидроаппаратуры, в гидромашинах и во многих других устройствах.

Вначале рассмотрим ламинарное течение в плоском зазоре с неподвижными стенками, расстояние между которыми равно  $a$ .



Начало системы координат для простоты поместим в середину зазора. В этом зазоре рассмотрим два поперечных сечения потока  $1$  и  $2$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Ширину рассматриваемой части потока обозначим  $b$ . На участке  $l$  выделим объём жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры  $l \times 2y \times b$ , и симметрично расположенного в зазоре. Условием равномерного движения параллелепипеда будет являться равенство сил давления и сил вязкого трения, действующих в направлении движения

$$(P_1 2yb - P_2 2yb) - \mu \left( -\frac{du}{dy} \right) 2lb = 0.$$

Знак « - » перед силой вязкого трения означает, что она направлена против движения. Знак « - » перед градиентом скорости означает, что производная  $\frac{du}{dy}$  отрицательна, т.е. с ростом  $y$ , в принятой системе отсчёта, скорость слоя жидкости уменьшается. По аналогии с зависимостями для трубы круглого сечения примем  $\Delta P = h_{mp} \rho g$ , поэтому приращение скорости можно представить в виде:

$$du = -\frac{h_{mp}\rho g}{\mu l} y dy.$$

После интегрирования по  $y$  получим

$$u = -\frac{h_{mp}\rho g}{\mu l} \int_y y dy = -\frac{h_{mp}\rho g}{\mu l} \frac{y^2}{2} + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим из условий движения жидкости у поверхности стенки, где  $y = \frac{a}{2}$ , а  $u = 0$ . Тогда

$$C = \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \frac{a^2}{4}.$$

После подстановки  $C$  в выражение для скорости элементарного слоя жидкости  $u$  примет вид

$$u = -\frac{h_{mp}\rho g}{\mu l} \frac{y^2}{2} + \frac{h_{mp}\rho g}{2\mu l} \frac{a^2}{4} = \frac{h_{mp}\rho g}{2\mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right).$$

Последняя формула определяет то, как связана скорость жидкости с расстоянием от середины потока, т.е. от положения слоя жидкости в зазоре. Зная это, нетрудно определить расход жидкости в зазоре. Для этого определим сначала элементарный расход  $dQ$  через площадку высотой (толщиной)  $dy$  и шириной  $b$ , который будет равен

$$dQ = u dy = \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) dy.$$

После интегрирования по  $y$  в пределах половины высоты щели от  $y = 0$  до  $y = \frac{a}{2}$ , получим половину расхода через щель:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} &= \int_0^{\frac{a}{2}} dQ = \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \int_0^{\frac{a}{2}} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) dy = \\ &= \frac{h_{mp}\rho g b}{2\mu l} \left( \frac{a^2}{4} y \Big|_0^{\frac{a}{2}} - \int_0^{\frac{a}{2}} y^2 dy \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h_{mp} \rho g b}{2 \mu l} \left( \frac{a^3}{8} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\frac{a}{2}} \right) = \frac{h_{mp} \rho g b}{2 \mu l} \left( \frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{24} \right) = \\
&= \frac{h_{mp} \rho g b a^3}{2 \mu l} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \frac{h_{mp} \rho g b a^3}{2 \mu l} \left( \frac{1}{12} \right).
\end{aligned}$$

Тогда полный расход через щель будет в два раза больше:

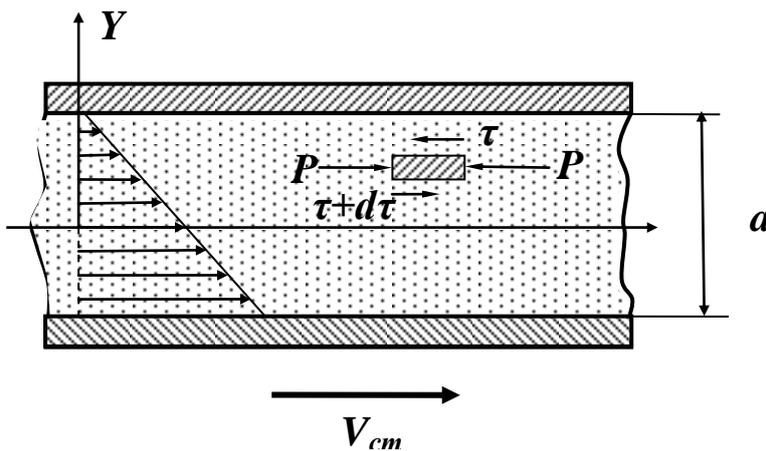
$$Q = \frac{h_{mp} \rho g b a^3}{12 \mu l}.$$

Если учесть, что средняя скорость в щели будет  $V = \frac{Q}{ab}$ , то потери напора в щели с плоскими стенками составят:

$$h_{mp} = \frac{Q 12 \mu l}{\rho g b a^3} = \frac{V a b 12 \mu l}{\rho g b a^3} = \frac{12 V \mu l}{\rho g a^2}.$$

### Ламинарное течение в плоских зазорах с подвижной стенкой

В процессе работы гидроаппаратов и гидромашин может встречаться ситуация, когда одна из плоских поверхностей, образующих зазор, перемещается параллельно другой попутно или встречно направлению потока жидкости. Движущаяся поверхность за счёт сил вязкого трения увлекает за собой жидкость. Если при этом давление в жидкости постоянно, то возникает так называемое *фрикционное безнапорное движение*. Эпюра распределения скоростей в этом случае примет треугольный вид, причём надо заметить, что скорости



относительного движения в прилегающих к стенкам слоях жидкости равны нулю. Внутри потока жидкости выделим некоторый объём прямоугольного сечения и рассмотрим действующие на него силы. В принятых условиях на торцовые поверхности

действует одинаковое давление, следовательно, одинаковыми будут и силы. Тогда для достижения равновесия рассматриваемого объёма необходимо равенство касательных напряжений на его нижней и верхней поверхностях. Отсюда следует, что  $d\tau = 0$  и  $\tau$  - величина постоянная. Следовательно, по закону

жидкостного трения Ньютона  $\tau = -\mu \frac{du}{dy} = C$ . В этом выражении  $C$  посто-

янная, а знак « - » означает, что при увеличении  $dy$  приращение скорости  $du$  становится отрицательным (скорость уменьшается). В таком случае для скорости примет вид

$$du = -\frac{Cdy}{\mu}.$$

После интегрирования, получим

$$\int du = -\int \frac{Cdu}{\mu} \Rightarrow u = -\frac{C}{\mu} y + C_1.$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $C_1$  найдём из условий на границах потока, где при  $y = \frac{a}{2}$   $u = 0$ , а при  $y = -\frac{a}{2}$   $u = V_{cm}$  ( $V_{cm}$  – скорость движения стенки).

Подставив эти значения в выражение для скорости, получим систему из двух уравнений

$$\begin{cases} 0 = -\frac{C}{\mu} \frac{a}{2} + C_1 \\ V_{cm} = \frac{C}{\mu} \frac{a}{2} + C_1. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения  $C_1 = \frac{C}{\mu} \frac{a}{2}$ , после подстановки его во второе запишем:

$$V_{cm} = \frac{C}{\mu} \frac{a}{2} + \frac{C}{\mu} \frac{a}{2} = \frac{C}{\mu} a.$$

Отсюда постоянная  $C$  примет вид  $C = \frac{V_{cm}\mu}{a}$ . Подставив это в выражение

для  $C_1$ , будем иметь значение постоянной интегрирования  $C_1 = \frac{V_{cm}\mu}{a} \frac{a}{2} = \frac{V_{cm}\mu}{2}$ .

После выяснения значений для постоянных  $C$  и  $C_1$  получим формулу скорости  $u$ :

$$u = V_{cm} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right).$$

Средняя скорость такого фрикционного потока жидкости составляет половину скорости подвижной поверхности, что нетрудно видеть на эпюре распределения скоростей по сечению зазора:

$$V = \frac{V_{cm}}{2},$$

а величину расхода можно вычислить по формуле:

$$Q = \frac{V_{cm}}{2} ab.$$

Вывод из сказанного состоит в том, что в зазоре между подвижной и неподвижной поверхностями даже при отсутствии разности давления всегда будет поток жидкости, скорость которого определяется относительными скоростями поверхностей.

Если фрикционное движение происходит при перепаде давлений, то скорости движения слоёв в таком потоке складываются из скоростей, обусловленных фрикционным движением, и скоростей, обусловленных напором. Величина скорости напорного движения жидкости в плоской щели была получена ранее и выглядит следующим образом:

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right).$$

Скорость подвижной поверхности щели  $V_{cm}$  может быть направлена попутно или встречно фрикционному потоку. В этом случае скорости слоёв жидкости определяются сложением или вычитанием скоростей, обусловленных фрикционным движением, и скоростей, обусловленных напором.

При попутном движении

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) + V_{cm} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right), \quad \text{при}$$

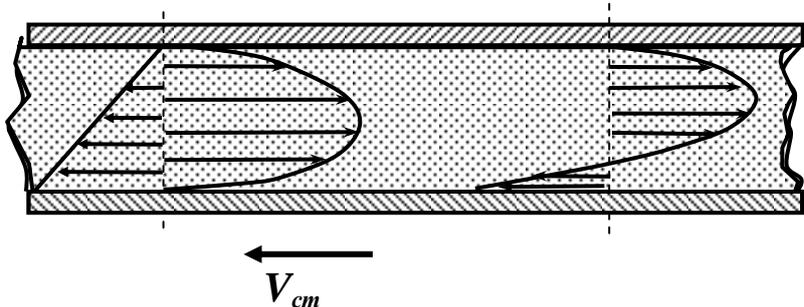
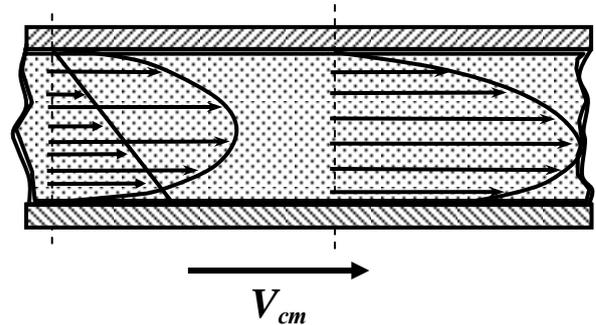
встречном

$$u = \frac{h_{mp} \rho g}{2 \mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) - V_{cm} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right). \text{Pa}$$

сход жидкости через плоскую щель при

напорно-фрикционном движении складывается из суммы расходов при двух движениях в отдельности и составляет:

$$Q = \frac{h_{mp} \rho g b a^3}{12 \mu l} \pm \frac{V_{cm}}{2} ab.$$



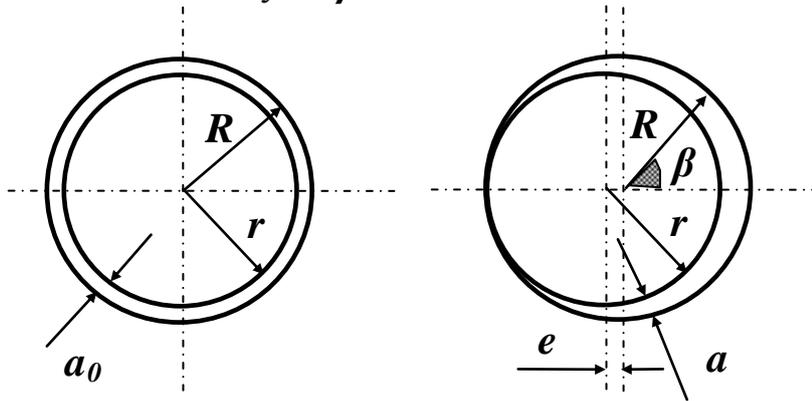
Первое слагаемое в формуле называется **на-**

**порным расходом**, а второе - **фрикционным**, который добавляется или вычитается при попутном или встречном направлении движения подвижной стенки щели.

## Ламинарное течение в кольцевых зазорах

Зазоры в виде цилиндрического кольца встречаются практически в каждом конструктивном элементе гидросистем: в любых гидравлических аппаратах, гидромашинах, гидравлической арматуре. Эти зазоры могут быть как с подвижными, так и с неподвижными поверхностями. Все рассуждения и полученные формулы могут быть применимы к движению жидкости в кольцевых зазорах (при условии, что это движение направлено вдоль осей поверхностей, которые образуют зазор) для тех случаев, когда толщина зазора мала по сравнению с радиусами поверхностей, образующих зазор, и не меняется в направлении движения жидкости. Все приведённые рассуждения вполне применимы к зазорам, образованным поверхностями, расположенными эксцентрично.

Рассмотрим общий случай, когда поверхности, образующие зазор, расположены с эксцентриситетом  $e$  и, следовательно, величина зазора переменна и зависит от угла  $\beta$ .



Если обозначить относительный эксцентриситет  $\varepsilon = \frac{e}{a_0}$  и учесть, что  $a_0 = R - r$ , то величина зазора будет описываться выражением

$$a = R + e \cos \beta - r = a_0(1 + \varepsilon \cos \beta).$$

Рассматривая кольцевой зазор, как плоскую щель шириной  $rd\beta$  (если радиус  $r$  представить большим катетом прямоугольного треугольника, то ширину щели можно определить как  $r \cdot \operatorname{tg} \beta$ , а при малых углах  $r \cdot \beta$ ), можно получить следующее выражение для элементарного расхода:

$$dQ = \frac{h_{mp} \rho g a^3}{12 \mu l} rd\beta = \frac{h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l} (1 + \varepsilon \cos \beta)^3 rd\beta.$$

В результате интегрирования по окружности получим:

$$Q = \frac{h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l} r \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \beta)^3 d\beta = \frac{2\pi r h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l} \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \right).$$

Величина

$$\frac{2\pi r h_{mp} \rho g a_0^3}{12 \mu l}$$

представляет собой расход через кольцевой зазор при одинаковой ширине по окружности  $a_0$ . Это значит, что при максимальном относительном эксцентриситете  $\varepsilon = 1$  (и при той же площади), величина расхода в **2,5** раза больше, чем при концентрическом зазоре  $a_0$ .

### Ламинарное течение в трубах прямоугольного сечения

Для определения потерь энергии в таких трубах используют формулу Дарси (напомним  $h_{mp} = \lambda_n \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}$ ) при условии, что коэффициент потерь на трение  $\lambda_n$  будет вычисляться по формуле  $\lambda_n = k \frac{64}{Re}$ . Коэффициент  $k$  в этом выражении есть функция, зависящая от соотношения сторон трубы  $\left(\frac{a}{b}\right)$ . Его значение можно определить по таблице:

$\frac{a}{b}$	1	1,5	2	3	4	5	6	$\infty$
$k$	0,89	0,92	0,97	1,07	1,14	1,19	1,32	1,5

Число Рейнольдса для этого случая надо подсчитывать по учетверённому отношению площади поперечного сечения к его периметру:

$$Re = \frac{2abV}{(a+b)v},$$

а вместо  $d$  в формуле Дарси использовать величину  $\frac{2ab}{a+b}$ . Приведённые выражения для  $Re$  и  $d$  объясняются тем, что зависимость  $\lambda_n = \frac{64}{Re}$ , получена из формулы Пуазейля, характеризующей потери в трубе **круглого** сечения. Число Рейнольдса в этом случае подсчитывается по формуле  $Re = \frac{Vd}{\nu}$ , а его кри-

тическое значение составляет **2300**. Число Рейнольдса для некруглых труб принято определять по отношению площади живого сечения к длине смоченного периметра  $Re = \frac{V\omega}{\chi}$ , а его критическое значение составляет **580**, т.е.

четверть от значения **2300**. Поэтому учетверить отношение необходимо для того, чтобы привести в соответствие коэффициент потерь  $\lambda_n$  для труб круглого и прямоугольного сечений.

С учётом перечисленного формула Дарси для труб прямоугольного сечения принимает вид:

$$h_{mp} = \lambda_l \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = k \left( \frac{64}{2abV} \right) \left( \frac{l}{(a+b)v} \right) \frac{V^2}{2g} =$$

$$= k \frac{64lV^2}{8a^2b^2Vg} = k \frac{8lV(a+b)^2 v}{a^2b^2g}.$$

### Смазочный слой в подшипнике

Особым случаем ламинарного движения жидкости в кольцевом зазоре является относительное вращение двух цилиндрических поверхностей, образующих кольцевую щель между вращающейся цапфой и неподвижным вкладышем.

За счёт вращения цапфы и прилипания к её поверхности жидкости образуется гидравлический клин, в котором развивается гидродинамическое давление, порождающее силу, уравновешивающую силы нагрузки, действующее на цапфу. Такие устройства широко применяются в технике и называются подшипниками скольжения. Математическое описание, применяемое для плоских щелей, к данному случаю не подходит, т.к. величина зазора по направлению движения не постоянна, а движение жидкости в подшипнике описывается значительно более сложными уравнениями. Поэтому в рамках настоящего курса мы коснёмся только основных результатов *теории подшипников скольжения жидкостного трения*. Она основана на гидродинамической теории смазки, которая была разработана русским учёным **Петровым Н. П.** в 1883г. Ему же принадлежит первая теоретическая формула для коэффициента трения подшипника скольжения.

В результате совместного решения шести уравнений равновесия для вязкой жидкости, уравнения неразрывности и трёх уравнений движения, с учётом ряда допущений, получено основное дифференциальное уравнение гидродинамической теории смазки:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right] + 6 \frac{g_{окр}}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0,$$

где  $P$  - гидродинамическое давление,

$\mu$  - динамическая вязкость,

$h$  - толщина плёнки жидкости,

$r$  - радиус цапфы,

$\vartheta_{окр}$  - окружная скорость цапфы,

$\theta$  - текущее значение угла, в котором определяется давление,

$z$  - координата, отсчитываемая от середин вкладыша в осевом направлении.

Расчётная схема подшипника скольжения показана на рисунке, где использованы следующие обозначения:

$D$  - диаметр цапфы,

$d$  - диаметр вкладыша,

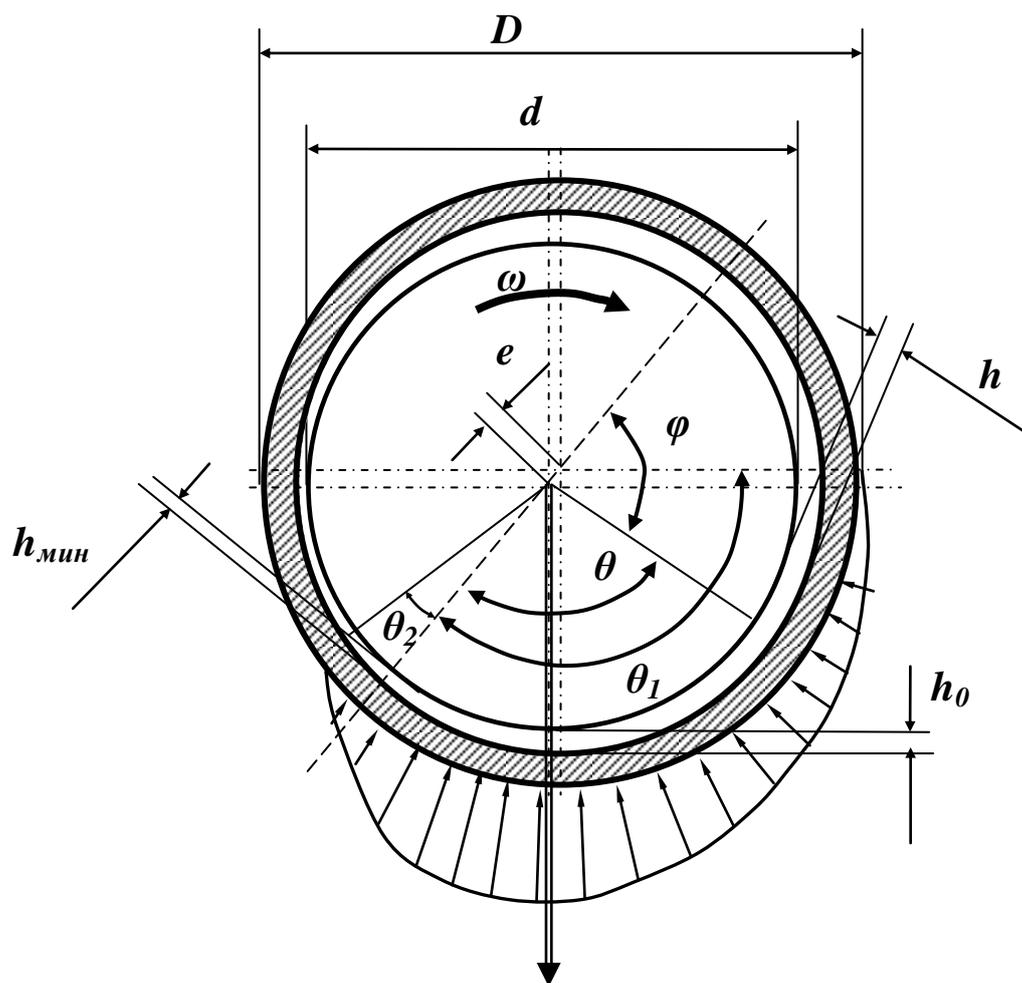
$e$  - эксцентриситет между осями цапфы и вкладыша,

$h_{мин}$  - минимальная толщина плёнки жидкости,

$h_0$  - толщина плёнки жидкости в области максимального давления,

$\varphi$  - угловая координата,

$\theta_1$  и  $\theta_2$  - значения углов начала и конца эпюры давления относительно линии центров.



Без учёта торцовых утечек жидкости основное уравнение гидродинамической теории смазки упрощается и принимает вид:

$$\frac{\partial P_0}{d\theta} = 6\mu \mathcal{G}_{окр} r \frac{h_0 - h}{h^3},$$

где  $P_0$  - давление в любой точке щели для бесконечно длинного подшипника.

Для подшипника конечной длины  $l$  справедливо уравнение, определяющее давление  $\varphi$ :

$$P = P_0 c \left[ 1 - \left( \frac{2z}{l} \right)^2 \right].$$

Касательное напряжение на цапфе  $\tau$  равно:

$$\tau = \mu \frac{\mathcal{G}_{окр}}{h} - \frac{h}{2r} \frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

Несущая способность (грузоподъёмность)  $W$  подшипника:

$$W = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} P \cos(\theta - \varphi) d\theta dz.$$

Сила трения  $F_{mp}$  и расход жидкости  $q_v$  определяются уравнениями

$$F_{mp} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau r d\theta dz, \quad q_v = \frac{1}{6} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} d\theta.$$

Решение последних уравнений затруднено сложными зависимостями изменения давления в слое жидкости по углу  $\theta$  и по длине цапфы для определённых геометрических размеров подшипника.

На практике для расчёта подшипников скольжения используют диаграммы безразмерных коэффициентов

$$\zeta = f_1(\lambda, \chi), \quad \varepsilon = f_2(\lambda, \chi), \quad q = f_3(\lambda, \chi),$$

где  $\zeta$  - коэффициент нагруженности подшипника,

$$\zeta = \frac{W \psi^2}{ld\omega\mu};$$

$\varepsilon$  - коэффициент сопротивления цапфы вращению,

$$\varepsilon = \frac{N2\psi}{ld^2\omega^2\mu};$$

$N$  - потеря мощности на преодоление сил сопротивления вращению цапфы в подшипнике;

$q$  - коэффициент торцового расхода,

$$q = \frac{q_v}{0,5\psi\omega d^2};$$

$\psi$  - относительный зазор,

$$\psi = \frac{D-d}{d};$$

$\lambda$  - относительная длина подшипника,

$$\lambda = \frac{l}{d};$$

$\chi$  - относительный эксцентриситет,

$$\chi = \frac{e}{\delta_0};$$

$\delta_0$  - средний зазор,

$$\delta_0 = \frac{D-d}{2};$$

$\omega$  - угловая скорость вращения цапфы.

## Лекция 20. Особые режимы течения жидкостей

Кроме достаточно подробно рассмотренных в настоящем курсе видов движения жидкости: ламинарного и турбулентного, движения жидкости при прохождении различных сопротивлений, истечений через насадки и других, существуют и другие разновидности течения. Они описываются гораздо более сложным математическим аппаратом или не описываются вообще, либо требуют сложного экспериментального изучения. Ниже рассмотрим основные из них, нередко проявляющиеся в гидросистемах технологического оборудования.

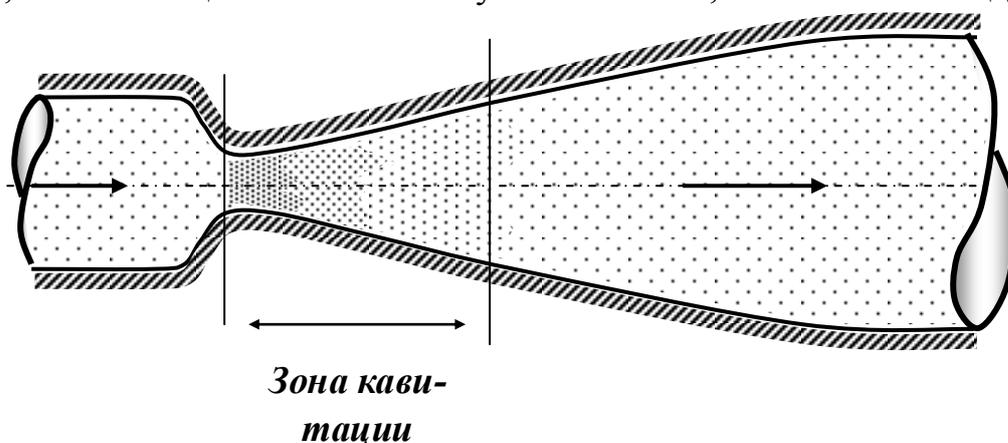
### Кавитационные течения

В некоторых случаях при движении жидкости возникают явления, связанные с изменением её агрегатного состояния, а именно, с превращением некоторых её частиц в газообразное состояние.

Например, при течении жидкости через местное сужение трубы происходит увеличение скорости и падение давления. Если абсолютное давление при этом уменьшается до значения, равного упругости насыщенных паров этой жидкости при данной температуре, или до давления, при котором начинается интенсивное выделение из нее газов, то в данном месте потока начинается интенсивное парообразование и выделение газов. В расширяющейся части потока скорость уменьшается, а давление возрастает, и выделение паров и газов прекращается; выделившиеся пары частично или полностью конденсируются, а газы постепенно растворяются.

Это *местное нарушение сплошности течения* с образованием паровых и газовых пузырей (каверн), обусловленное местным падением давления в потоке, называется *кавитацией*.

Если в прозрачной трубке, диаметр которой сначала плавно уменьшается, а затем еще более плавно увеличивается, течёт поток жидкости, ско-



рость которого регулируется, то можно визуально наблюдать следующие явления.

При малой скорости жидкости падение давления в узком месте трубки незначительно, поток вполне прозрачен. При увеличении скорости в трубке абсолютное давление в соответствии с уравнением Бернулли будет падать и при некотором значении

$$P_{abc} = P_{нт} ,$$

где  $P_{нт}$  - давление насыщенных паров, в трубке появляется отчетливо видимое помутнение жидкости, обусловленное появлением пузырьков газа. Это и есть зона кавитации.

При дальнейшем увеличении скорости размеры зоны кавитации возрастают. Кавитация сопровождается характерным шумом, а при длительном её воздействии также и **эрозионным разрушением** твёрдых, как правило, металлических стенок. Последнее объясняется тем, что конденсация пузырьков пара (и сжатие пузырьков газа) происходит со значительной скоростью, частицы жидкости, заполняющие полость конденсирующегося пузырька, устремляются к его центру и в момент завершения конденсации вызывают местный гидравлический удар, т. е. значительное местное повышение давления. Разрушение материала при кавитации происходит не там, где выделяются пузырьки, а там, где они конденсируются вследствие длительного воздействия знакопеременных сил.

Кавитация в обычных случаях явление нежелательное.

При кавитации также возрастает сопротивление трубопроводов и, следовательно, уменьшается их пропускная способность.

«Кавитация может возникать во всех устройствах, где поток претерпевает местное сужение с последующим расширением, например, в кранах, вентилях, задвижках, диафрагмах, жиклерах и т.п. В отдельных случаях возникновение кавитации возможно также и без расширения потока вслед за его сужением, а также в трубах постоянного сечения при увеличении нивелирной высоты и гидравлических потерь.

Кавитация может иметь место в гидромашинах (насосах и гидротурбинах), а также на лопастях быстровращающихся гребных винтов. В этих случаях следствием кавитации являются резкое снижение коэффициента полезного действия машины и затем постепенное разрушение ее деталей, подверженных воздействию кавитации. В гидросистемах кавитация может возникать в трубопроводах низкого давления - во всасывающих трубопроводах. В этом случае область кавитации распространяется на значительную часть всасывающего трубопровода или даже на всю его длину. Поток в трубопроводе при этом становится двухфазным, состоящим из жидкой и паровой фаз.

В начальной стадии паровыделения паровая фаза может быть в виде мелких пузырьков, распределённых по объёму движущейся жидкости приблизительно равномерно. При дальнейшем парогазовыделении происходит укрупнение пузырьков, которые в случае горизонтального расположения трубы движутся преимущественно в верхней части ее сечения.

В дальнейшем возможны случаи полного разделения парогазовой и жидкой фаз и движения их самостоятельными потоками, первая фаза - в

верхней, вторая - в нижней части сечения трубопровода. При небольших диаметрах трубопровода возможно образование парогазовых пробок и движение фаз, жидкой и газовой, чередующимися столбиками.

С увеличением парогазовой фазы пропускная способность трубопровода значительно уменьшается. Конденсация выделившихся паров и растворение газа происходит в насосах, где давление значительно повышается, и в напорных трубопроводах, по которым жидкость движется под высоким давлением от насоса к потребителю.

Кавитация, обусловленная выделением паров жидкости, происходит по-разному в однокомпонентных (простых) и многокомпонентных (сложных) жидкостях. Для однокомпонентной жидкости давление, соответствующее началу кавитации, вполне определяется упругостью насыщенных паров, зависящей только от температуры, и кавитация протекает так, как было описано выше.

Многокомпонентная жидкость состоит из так называемых легких и тяжелых фракций. Первые обладают большим значением упругости паров, чем вторые, поэтому при кавитации сначала вскипают легкие фракции, а затем тяжелые. Конденсация же паров происходит в обратном порядке, сначала выпадают тяжелые фракции, затем - легкие.

При наличии легких фракций многокомпонентные жидкости более склонны к кавитации, и паровая фаза в них удерживается дольше, но процесс кавитации выражен менее резко, чем у однокомпонентных жидкостей».

Для характеристики течения с кавитацией применяется безразмерный критерий  $\chi$ , называемый **числом кавитации** и равный

$$\chi = \frac{P - P_n}{\rho V^2},$$

где  $P$  - абсолютное давление,  
 $P_n$  - давление парообразования,  
 $V$  - скорость потока.

Обычно число кавитации  $\chi$  определяют на входе в тот или иной агрегат, внутри которого возможно возникновение кавитации.

Значение  $\chi$ , при котором в агрегате начинается кавитация, называется **критическим числом кавитации**. При  $\chi > \chi_{кр}$  коэффициент агрегата  $\xi$  от  $\chi$  не зависит, а при  $\chi < \chi_{кр}$  возрастает с уменьшением  $\chi$ .

Обычно стремятся к тому, чтобы кавитацию в гидросистемах не допускать.

Но можно отметить, что иногда это явление оказывается полезным. Его используют в так называемых кавитационных регуляторах расхода, обеспечивающих практически постоянный расход через зону кавитации. На принципе использования гидравлических микроударов, происходящих при кави-

тации, построены устройства для регенерации (очистки от загрязнений) очищающих элементов фильтров.

## Течение с облитерацией

При течении жидкости через капилляры, а также малые зазоры наблюдается явление, которое нельзя объяснить законами гидравлики. Это явление заключается в том, что расход жидкости через капилляр или зазор с течением времени уменьшается, несмотря на то, что перепад давления, при котором происходит движение жидкости, и ее физические свойства остаются неизменными. Причина этого явления кроется в том, что при определенных условиях происходит как бы засорение (заращивание) канала твердыми частицами, причем в зазорах и капиллярных каналах размером, меньшим **0,01 мм**, может произойти полное заращивание проходного сечения и уменьшение расхода до нуля. Этот процесс носит название **облитерации** и заключается в том, что на поверхности раздела твердого тела и жидкости происходит под действием молекулярных и электромагнитных сил, возникающих между стенкой и жидкостью, адсорбция, т.е. уплотнение жидкости до практически твердого состояния на поверхности стенки.

Степень облитерации зависит от молекулярной структуры жидкости, причем это явление в большей степени проявляется в сложных, высокомолекулярных жидкостях типа масляной смеси на керосиновой основе, применяемой в силовых гидросистемах. Толщина адсорбционного слоя для жидкостей этого типа составляет несколько микрометров. Поэтому при течении через капилляры и малые зазоры этот слой может существенно уменьшить площадь поперечного сечения канала или даже полностью его перекрыть.

С повышением температуры интенсивность адсорбции, а следовательно, и облитерации, понижается. Повышение перепада давления, под которым происходит движение жидкости через зазор или капилляр, наоборот, увеличивает степень облитерации.

Если одна из стенок, образующих зазор, приводится в движение, т.е. происходит сдвиг, то образованные адсорбционные слои разрушаются, облитерация устраняется и восстанавливается первоначальный расход жидкости через зазор. Однако для такого сдвига обычно требуется значительное усилие. В зазорах между подвижной и неподвижной стенками облитерации не происходит.

Для избегания облитерации каналов жиклеров и дросселей рекомендуется их отверстия выполнять не меньше **0,2—0,4 мм**. Для устранения облитерации через дросселирующее отверстие пропускают стержень, перемещающийся возвратно-поступательно и обеспечивающий автоматическую прочистку отверстия (разрушение адсорбционного слоя).

## Течение с теплообменом

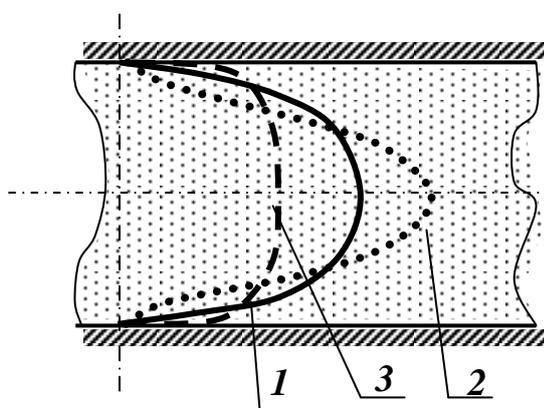
В рассмотренных выше случаях ламинарного течения не учитывалось изменение температуры и, следовательно, изменение вязкости жидкости как в пределах поперечного сечения, так и вдоль потока, т.е. предполагалось постоянство температуры во всех точках потока. Подобное течение называют изотермическим. В общем случае, конечно, течение жидкости по гидросистеме сопровождается изменением температуры.

Очевидно, что если по трубопроводу движется жидкость, температура которой значительно выше температуры окружающей среды, то такое течение сопровождается теплоотдачей через стенку трубы во внешнюю среду и, следовательно, охлаждением жидкости. Когда же температура движущейся жидкости ниже температуры окружающей среды, то происходит приток тепла через стенку трубы. В результате жидкость в процессе течения нагревается.

В обоих указанных случаях при течении жидкости осуществляется теплообмен с внешней средой. При этом температура и вязкость жидкости, непостоянны, а течение не изотермическое.

Поэтому зависимости, полученные в предположении постоянства вязкости по сечению потока, при течении со значительным теплообменом нуждаются в поправках. При течении жидкости, сопровождающемся её охлаждением, слои жидкости, непосредственно прилегающие к стенке, имеют температуру ниже, а вязкость выше, чем в основной части потока. Вследствие этого торможение в пристенных слоях жидкости более интенсивное, а градиент скорости у стенки меньше градиента скорости в основной части потока.

При течении же, сопровождающемся нагреванием жидкости, обусловленным притоком тепла через стенку, пристенные слои жидкости будут иметь более высокую температуру и меньшую вязкость, вследствие чего градиент скорости у стенки будет больше, чем в основной части потока. Таким



образом, вследствие теплообмена через стенку трубы между жидкостью и внешней средой происходит нарушение параболического закона распределения скоростей по сечению потока.

На рисунке показаны сравнительные графики распределения скоростей при изотермическом течении

(линия 1), при течении с охлаждением жидкости (линия 2) и при течении с её нагреванием (линия 3). Из рисунка следует, что охлаждение жидкости влечет за собой увеличение неравномерности распределения скоростей, а нагрева-

ние – уменьшение, по сравнению с обычным параболическим распределением скоростей.

Изменение профиля скоростей при отклонении от изотермического течения вызывает изменение закона сопротивления потоку жидкости.

При ламинарном течении вязких жидкостей в трубах с теплообменом (охлаждением) сопротивление получается больше, а при течении с притоком тепла (нагреванием) меньше, чем при изотермическом течении.

Ввиду того, что точное решение задачи о течении жидкости с теплообменом представляет большую сложность, так как приходится учитывать переменность температуры и вязкости жидкости по поперечному сечению и вдоль трубы, а также рассматривать тепловые потоки в разных сечениях трубы, для практических расчетов пользуются следующей, приближенной формулой для определения коэффициента потерь на трение с учётом теплообмена

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_{\text{ср.ж}}} \sqrt{\frac{\nu_{\text{ср.тсс}}}{\nu_{\text{ср}}}},$$

где  $\text{Re}_{\text{ср.ж}}$  - число Рейнольдса, подсчитанное по средней вязкости жидкости,

$\nu_{\text{ср.тсс}}$  - вязкость жидкости, соответствующая средней температуре стенки,

$\nu_{\text{ср}}$  - средняя вязкость жидкости.

## Течение при больших перепадах давления

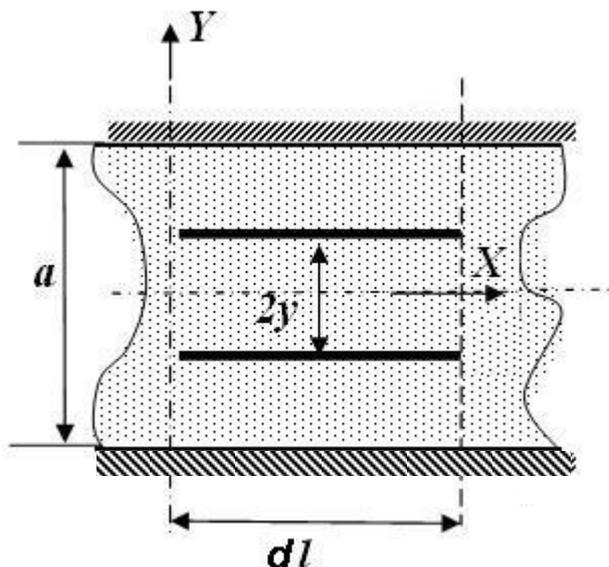
В высоконапорных гидромашинах, например гидравлических прессах, может происходить ламинарное течение жидкости через малые зазоры при больших перепадах давлений порядка нескольких десятков и даже сотен мегапаскалей.

Опыт показывает, что в таких случаях падение напора вдоль потока оказывается существенно нелинейным, а закон Пуазейля дает заметную погрешность.

При таких течениях необходимо учитывать нагревание жидкости, которое ведёт к уменьшению её вязкости, причем степень влияния этого фактора будет нарастать вдоль потока жидкости. С другой стороны, с увеличением давления вязкость жидкостей возрастает. Таким образом, вязкость жидкости переменна вдоль потока и, как результат одновременного действия двух указанных факторов, продольный градиент давления  $\frac{dP}{dl}$ , обусловленный трением, оказывается непостоянным.

Указанные факторы действуют и на расход: повышение температуры способствует его увеличению, а высокое давление в жидкости - его умень-

шению, по сравнению со значением, определяемым законом Пуазейля. Таким образом, влияние этих двух факторов на расход является противоположным.



Рассмотрим задачу о ламинарном течении в зазоре толщиной  $a$ , длиной  $l$  и шириной  $b$  с учетом влияния на вязкость давления и температуры. При этом допускаем, что плотность жидкости не зависит от давления и температуры, а размеры зазора таковы, что его толщина существенно меньше ширины.

Ранее было установлено, что расход через плоскую щель составляет

$$Q = \frac{h_{mp} \rho g b a^3}{12 \mu l} = \frac{h_{mp} \rho g}{l} \times \frac{b a^3}{12 \mu}.$$

Физическая сущность первого сомножителя в этом произведении – потери на трение по длине щели. Он показывает, как быстро теряется энергия по ходу течения жидкости. Причём потери на трение  $h_{mp} \rho g$  есть ни что иное, как уменьшение давления по длине щели  $l$ . Если учесть сказанное и перейти к пределу, эту величину можно характеризовать падением давления по длине зазора вида:

$$-\frac{dP}{dl}.$$

Знак « - » в этой формуле показывает, что давление по длине зазора уменьшается.

С учётом последнего и в пересчёте на единичную ширину зазора ( $b=l$ ) расход через щель можно записать в виде

$$Q = -\frac{dP}{dl} \frac{a^3}{12 \mu}.$$

При рассмотрении свойств жидкости упоминались формулы, учитывающие изменение коэффициента динамической вязкости  $\mu$  от температуры:

$$\mu_t = \mu_0 e^{-k_t (T - T_0)},$$

и давления:

$$\mu_P = \mu_0 e^{k_P(P-P_0)}.$$

Для одновременного учёта влияния на вязкость жидкости давления и температуры можно принять

$$\mu = \mu_0 e^{k_P(P-P_0) - k_t(T-T_0)}.$$

В приведённых формулах, напомним, использованы следующие обозначения:

$\mu_t$  – динамический коэффициент вязкости при заданной температуре,

$\mu_P$  – динамический коэффициент вязкости при заданном давлении,

$T_0, P_0, \mu_0$  – температура, давление и динамический коэффициент вязкости жидкости в начале зазора,

$T, P, \mu$  – температура, давление и динамический коэффициент вязкости жидкости в конце зазора,

$k_t$  – коэффициент, для минеральных масел равный **0,02-0,03**,

$k_P$  – коэффициент, для минеральных масел равный **0,002-0,003**,

$e$  – основание натурального логарифма, равное **2,718282**.

Теперь запишем уравнение тепловой энергии, т. е. равенство между потерей энергии на трение, превратившейся в тепло, и приростом тепловой энергии жидкости за единицу времени:

$$Q\rho C(T - T_0) = k(P_0 - P)Q,$$

где  $C$  - теплоемкость жидкости,

$k$  — коэффициент, учитывающий долю работы сил вязкости, которая идет на нагревание жидкости.

При  $k = 1$  теплоотдача в стенку отсутствует, и вся теряемая энергия, обусловленная вязким трением, идет на нагревание жидкости. При  $k = 0$  происходит максимальная теплоотдача в стенку, в результате чего повышения температуры жидкости не происходит (изотермическое течение).

Из последнего равенства можно получить:

$$T - T_0 = \frac{k}{\rho C} (P_0 - P).$$

После подстановки этого равенства в выражение степени формулы для  $\mu$  получим:

$$\mu = \mu_0 e^{k_P(P-P_0) - k_t \left( \frac{k}{\rho C} (P_0 - P) \right)} = \mu_0 e^{(P_0 - P) \left( k_P + \frac{k_t k}{\rho C} \right)}.$$

Произведём разделение переменных в уравнении расхода через зазор

$$\frac{12Q}{a^3} dl = -\frac{dP}{\mu}.$$

Используем полученную связь между  $\mu$  и  $P$  выполним подстановку:

$$\frac{12Q}{a^3} dl = -\frac{dP}{\mu_0 e^{(P-P_0)(k_P + \frac{k_t k}{\rho C})}}.$$

Произведём алгебраические преобразования: домножим обе части на  $\mu_0$  и поменяем знак степени при  $e$  ( $x^y = \frac{1}{x^{-y}}$ ):

$$\frac{12Q\mu_0}{a^3} dl = -e^{(P-P_0)(k_P + \frac{k_t k}{\rho C})} dP.$$

Проинтегрируем последнее выражение:

$$\int \frac{12Q\mu_0}{a^3} dl = -\int e^{(P-P_0)(k_P + \frac{k_t k}{\rho C})} dP.$$

Результатом интегрирования, будет равенство:

$$\frac{12Q\mu_0}{a^3} l = \frac{1}{k_P + \frac{k_t k}{\rho C}} e^{(P-P_0)(k_P + \frac{k_t k}{\rho C})} + C_1.$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  найдем, учитывая, что в начальном сечении потока при  $l=0$   $P=P_0$ . Следовательно:

$$C_1 = -\frac{1}{k_P + \frac{k_t k}{\rho C}}.$$

Подставив постоянную интегрирования  $C_1$ , получим

$$\frac{12Q\mu_0}{a^3} l = \frac{1}{k_P + \frac{k_t k}{\rho C}} \left( e^{(P-P_0)(k_P + \frac{k_t k}{\rho C})} - 1 \right).$$

Выразим отсюда  $Q$ :

$$Q = \frac{a^3}{12\mu_0 l} \left( \frac{1}{k_P + \frac{k_t k}{\rho C}} \right) \left( e^{(P-P_0)(k_P + \frac{k_t k}{\rho C})} - 1 \right).$$

Приведённую формулу можно анализировать с различных позиций. Мы посмотрим на неё только с одной точки зрения. Сравним её с формулой расхода через щель, полученную на основании закона Пуазейля. Расход по закону Пуазейля линейно изменяется при изменении давления. Последняя же формула, учитывающая изменение вязкости при изменении давления и теплообмен в потоке, что имеет место, когда жидкость движется с большими скоростями и при больших перепадах давления, описывает связь давления и расхода степенной функцией. При этом чем выше давление, тем больше отклонение расхода от линейной зависимости, соответствующей закону Пуазейля. Объясняется это тем, что расход жидкости при ламинарном течении пропорционален перепаду давления  $\Delta P$ , а величина потерянной энергии, равная произведению  $\Delta P Q$ , пропорциональна квадрату перепада давления. По этой причине потеря энергии на единицу расхода жидкости растёт пропорционально перепаду давления.

## Список литературы

1. Башта Т.М. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы.– М.: Машиностроение, 1970г.-504 с.
2. Башта Т.М. Машиностроительная гидравлика.- М.: Машиностроение, 1971г.-672 с.
3. Орлов Ю.М. Механика жидкости, гидравлические машины и основы гидропривода агрегатов ракетных комплексов. Учебное пособие. – М: ООО «Пресс-мастер», 2001.- 379с.
4. Иванов В.И., Навроцкий В.К., Сазанов И.И., Трифонов О.Н. Гидравлика и объемный гидропривод. Учебное пособие. - М.: ИЦ МГТУ «СТАНКИН», 2003. – 154 с.
5. Шейпак А.А. Гидравлика и гидропневмопривод: Учебное пособие. Ч1. Основы механики жидкости и газа. 2-е изд. Перераб. и доп. –М.: МГИУ, 2003. –192с.
6. Схиртладзе А.Г., Иванов В.И., Кареев В.Н. Гидравлические и пневматические системы.– М.: ИЦ МГТУ “Станкин”, Янус-К, 2003. –544с.
7. Станочные гидравлические системы. Под ред. Ф.Ю. Свитковского. – Ижевск-Екатеринбург, изд. Института экономики Ур. РАН., 2003. 239с.
8. Избаш С.В. Основы гидравлики. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1952. 423с.
9. Чугаев Р.Р., Гидравлика: Учебник для вузов. – 4-е изд. доп. и перераб. - Л. Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. 672с.